



# Ruang Riemannian & Kalkulus Tensor

## TEORI RELATIVITAS

Dosen Pengajar: Hervin Maulina, S.Pd., M.Sc.

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN FISIKA FKIP UNIVERSITAS LAMPUNG



# Tujuan Pembelajaran

Setelah mengikuti perkuliahan ini, mahasiswa mampu:

1. Menjelaskan secara konseptual apa yang dimaksud dengan ruang Riemannian dan mengapa ruang-waktu dapat melengkung.
2. Memahami peran tensor dalam menggambarkan kelengkungan ruang dan gravitasi.
3. Menerapkan konsep dasar ruang melengkung dalam contoh fisika dan kehidupan sehari-hari.
4. Menyelesaikan soal konseptual dan perhitungan sederhana terkait jarak dan
  - kelengkungan ruang.



# 1. Latar Belakang

Mengapa kita perlu ruang melengkung?

Pada zaman Newton:

- Ruang → dianggap datar dan tidak berubah.
- Waktu → mutlak, berjalan sama di mana pun.
- Gravitasi → gaya tarik antar benda.

Gravitasi = gaya tarik antara dua massa.

Einstein (1915) mengubah cara pandang ini dengan ide:

“Gravitasi bukan gaya, melainkan akibat kelengkungan ruang dan waktu karena keberadaan massa dan energi.”



# 1. Latar Belakang

Analogi visual

Bayangkan kain elastis direntangkan datar  $\rightarrow$  ruang datar (Euclidean).

Letakkan bola berat di tengah kain  $\rightarrow$  kain melengkung  $\rightarrow$  ruang melengkung (Riemannian).

Bola kecil di sekitar bola besar bergerak melingkar, bukan karena gaya tarik, tetapi karena permukaannya melengkung.



## 2. Ruang Riemannian

### GEOMETRI ALAM SEMESTA

Bernhard Riemann memperluas geometri Euclid menjadi geometri melengkung. Dalam fisika, ruang-waktu empat dimensi ( $x, y, z, t$ ) dapat melengkung karena massa dan energi.

### Rumus Umum Jarak (metrik)

- Ruang datar (Euclid):

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- Ruang melengkung (Riemannian):

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

di mana  $g_{ij}$  disebut **komponen metrik**, yang menentukan bentuk dan kelengkungan ruang.

Ruang **Euclidean** adalah ruang yang:

- Tidak memiliki kelengkungan.
- Sifat geometrinya mengikuti hukum **Pythagoras**.
- Semua garis lurus tetap lurus di mana pun.

 **Contoh:** papan tulis, lantai datar, atau bidang koordinat biasa  $x, y, z$ .

Misalkan ada dua titik di bidang datar:

$$P_1(x_1, y_1), \quad P_2(x_2, y_2)$$

Jarak antara keduanya (dari teorema Pythagoras):

$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Jika kita kuadratkan:

$$s^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Untuk dua titik yang sangat berdekatan, beda koordinatnya sangat kecil:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

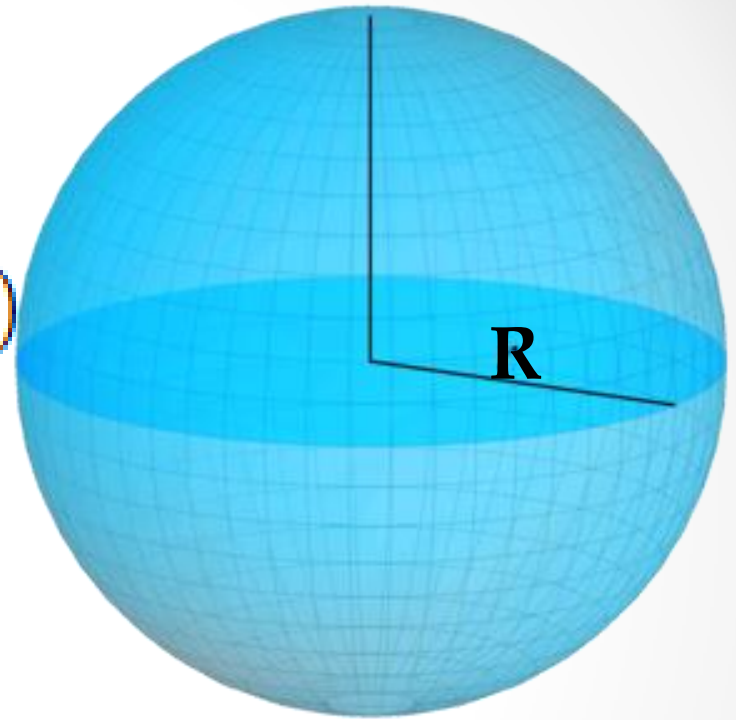
Inilah **bentuk diferensial jarak** dalam ruang datar dua dimensi.

## Contoh nyata:

Pada permukaan bola berjari-jari  $r$ ,

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

→ menunjukkan bahwa jarak antara dua titik di bola **tidak linear**, tetapi mengikuti kelengkungan permukaan.



Kalau dua titik jauh, hasil akhirnya bisa diringkas dengan sudut pusat  $\gamma$ :

$$s = R\gamma$$

di mana:

$$\cos \gamma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$



### 3. Hubungan dengan Gravitasi

Massa besar seperti Matahari membuat ruang di sekitarnya melengkung. Planet tidak “ditarik” oleh gaya, tapi **bergerak mengikuti lekukan ruang-waktu**. Lintasan ini disebut **geodesik** — yaitu “garis lurus” di ruang yang melengkung.

**Makna fisis: Gravitasi = geometri ruang-waktu.**





## 4. Kalkulus Tensor: Bahasa Ruang-Waktu

Untuk menggambarkan kelengkungan, digunakan alat matematika bernama tensor.

| Jenis  | Contoh                        | Makna Fisis                 |
|--------|-------------------------------|-----------------------------|
| Skalar | Suhu, energi                  | Tak memiliki arah           |
| Vektor | Kecepatan, gaya               | Satu arah                   |
| Tensor | Metrik, tekanan, kelengkungan | Banyak arah (multi-dimensi) |

Tensor adalah generalisasi dari vektor agar dapat digunakan di ruang melengkung

◆ Tensor penting dalam relativitas:

- $g_{\mu\nu}$ : Tensor metrik (bentuk ruang-waktu)
- $T_{\mu\nu}$ : Tensor energi-momentum (isi energi & massa)
- $R_{\mu\nu}$ : Tensor kelengkungan Ricci (melengkungnya ruang-waktu)

Einstein merangkum gravitasi dalam satu persamaan:

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

**Artinya:**

Massa memberi tahu ruang-waktu bagaimana melengkung.  
Ruang-waktu memberi tahu materi bagaimana bergerak.

Persamaan ini menghubungkan dua dunia:

| Bagian       | Makna Fisis                                                                         |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| $G_{\mu\nu}$ | Geometri ruang-waktu → <i>bagaimana ruang dan waktu melengkung</i>                  |
| $T_{\mu\nu}$ | Energi dan momentum → <i>apa yang mengisi ruang-waktu (materi, energi, tekanan)</i> |

Dan konstanta  $\frac{8\pi G}{c^4}$  adalah “jembatan” yang menyatakan **seberapa kuat energi memengaruhi kelengkungan ruang-waktu**.

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



## 5. Analisis Matematis Sederhana

a) Ruang datar (Euclidean 2D)

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

b) Ruang melengkung (permukaan bola)

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Kalau dua titik jauh, hasil akhirnya bisa diringkas dengan sudut pusat  $\gamma$ :

$$s = R\gamma$$

di mana:

$$\cos \gamma = \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos \theta_1 \cos \theta_2$$

### c) Gerak partikel bebas di ruang melengkung

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Partikel bebas tetap bergerak “lurus” dalam ruang-waktu, tetapi “lurus” di sini mengikuti bentuk kelengkungan ruang (geodesik).

| Simbol                     | Arti Fisis                                     |
|----------------------------|------------------------------------------------|
| $x^\mu$                    | Koordinat ruang-waktu                          |
| $s$                        | Parameter panjang lintasan (jarak ruang-waktu) |
| $\Gamma_{\alpha\beta}^\mu$ | <i>Simbol Christoffel</i>                      |
| $\frac{dx^\alpha}{ds}$     | Komponen kecepatan ruang-waktu                 |
| $\frac{d^2 x^\mu}{ds^2}$   | Percepatan ruang-waktu                         |



## 6. Contoh Fisis dan Kehidupan Nyata

| Fenomena          | Penjelasan Riemannian                                                                 | Bukti Nyata                                |
|-------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Orbit planet      | Planet mengitari Matahari mengikuti kelengkungan ruang-waktu                          | Pergeseran orbit Merkurius                 |
| Pembelokan cahaya | Cahaya melengkung karena ruang-waktu melengkung di dekat massa besar                  | Eksperimen Eddington 1919                  |
| GPS satelit       | Jam satelit berjalan lebih cepat (gravitasi lemah) dibanding di Bumi (gravitasi kuat) | Koreksi waktu $\pm 38$ mikrodetik per hari |
| Lubang hitam      | Massa besar melengkungkan ruang-waktu ekstrem hingga cahaya tak bisa keluar           | Citra lubang hitam (EHT, 2019)             |



# Contoh Latihan Soal 1

## Soal 1 – Jarak di permukaan bola

Hitung jarak dua titik di permukaan bola  $R = 1$  m dengan  $d\theta = 0.2$  rad dan  $d\phi = 0.1$  rad pada  $\theta = \pi/4$ .

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$



## Contoh Latihan Soal 2

Pada bola berjari-jari  $R = 6.371 \times 10^6$  m terdapat dua titik:

$$A(\theta_1 = 60^\circ, \phi_1 = 0^\circ), \quad B(\theta_2 = 30^\circ, \phi_2 = 90^\circ)$$

Tentukan jarak antara A dan B jika dihitung dengan:

1. Geometri Euclidean (ruang datar)
2. Geometri Riemannian (permukaan bola)



# TUGAS

Seorang mahasiswa sedang mempelajari bagaimana benda jatuh bebas dapat dijelaskan melalui teori relativitas umum.

Dalam teori ini, Einstein mengatakan bahwa **gravitasi bukan gaya**, tetapi akibat **kelengkungan ruang-waktu** yang digambarkan oleh **tensor metrik  $g_{\mu\nu}$** .

- Jelaskan secara sederhana bagaimana ruang-waktu bisa “melengkung” di sekitar Bumi.
- Jika di dekat permukaan Bumi, kelengkungan ini sangat kecil, tunjukkan bagaimana hasilnya hampir sama dengan hukum gravitasi Newton  $F = ma$ .
- Berikan satu contoh nyata di mana efek kelengkungan ruang-waktu dapat *diukur* dalam kehidupan modern.