

***Pertemuan-2A***

# **Model Matematika Sistem Kendali**

Pemodelan menggunakan Persamaan Differensial

*Umi Murdika, M.T.*

- **Kemampuan akhir yang diharapkan,**

**Mahasiswa:**

1. Mengetahui bahwa persamaan differensial dapat menggambarkan perilaku dinamis dari system fisik
1. Memahami Penerapan Transformasi Laplace dan penggunaannya untuk mendapatkan fungsi Alih
2. Memahami peran penting permodelan dalam proses Desain system Kontrol

# *PEMODELAN* Sistem Kontrol

- Pemodelan Sistem Kontrol, meliputi:
  1. Pendahuluan
  2. Klasifikasi Sistem
  3. PEMODELAN SISTEM FUNGSI FREKUENSI
    1. Transformasi Laplace : Teori Pendukung Pemodelan
    2. **Pemodelan menggunakan Persamaan Differensial**
    3. Pemodelan dengan Fungsi Transfer (fungsi Alih) dan Diagram Blok Fungsi transfer/alih
  4. PEMODELAN SISTEM FUNGSI WAKTU
    1. Pemodelan dengan Ruang keadaan (*State Space Model*)
    2. Pemodelan Grafik aliran sinyal

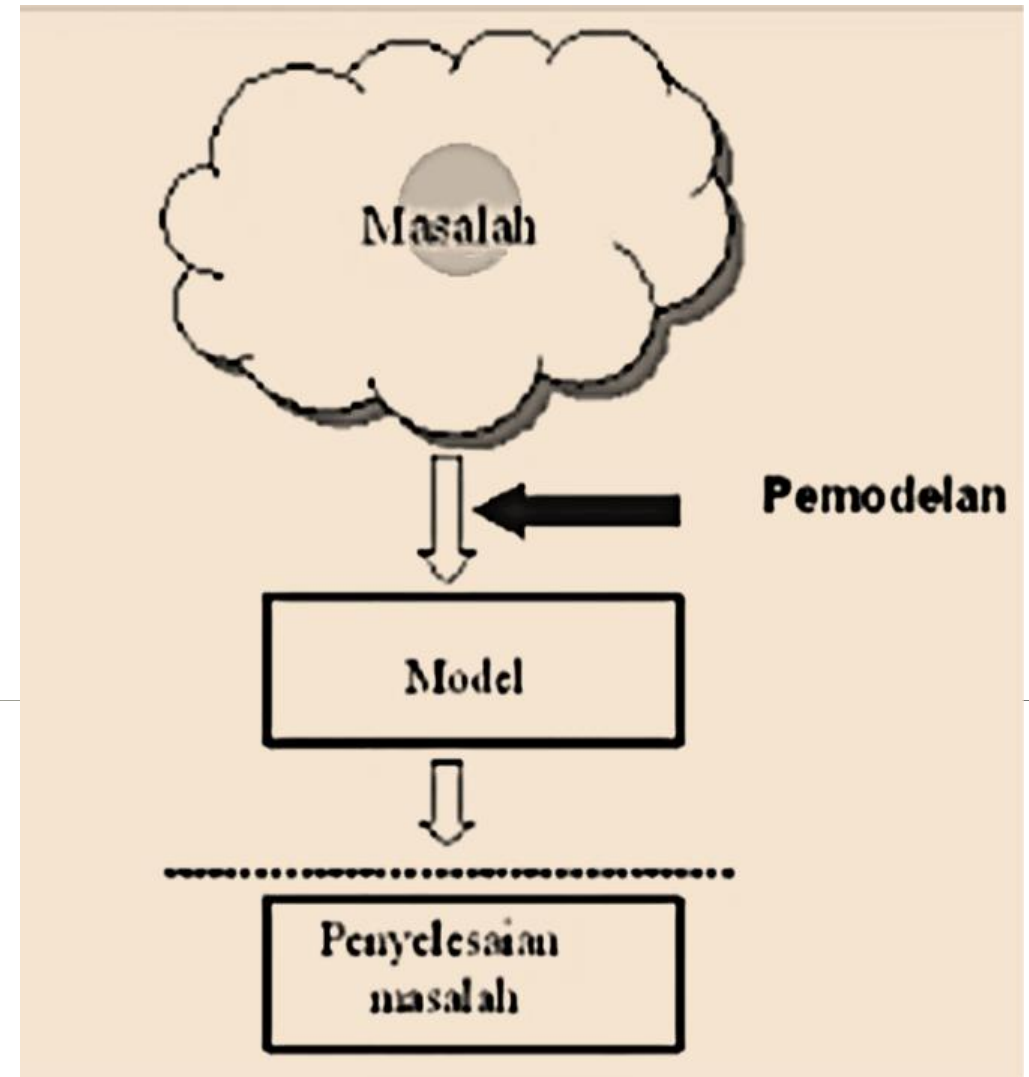
## 4. PEMODELAN SISTEM KENDALI menggunakan Persamaan Differensial

- **Model Matematis** adalah gambaran matematik dari karakteristik dinamik suatu system.
- Beberapa system dinamik seperti mekanika, listrik, panas, hidroulik, ekonomi, biologi dan sebagainya dapat dikarakterisasikan dengan persamaan differensial.
- Persamaan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan beberapa hukum fisika dari system yang dipelajari, misalnya:
  - Hukum Newton untuk system Mekanik
  - Hukum Kirchoff untuk system listrik
- Misalnya untuk untuk analisis pada system kendali terdapat dua pendekatan analisis :
  1. Fungsi alih (tradisional, untuk system SISO)
  2. State space (modern, untuk system MIMO)

# PENDAHULUAN

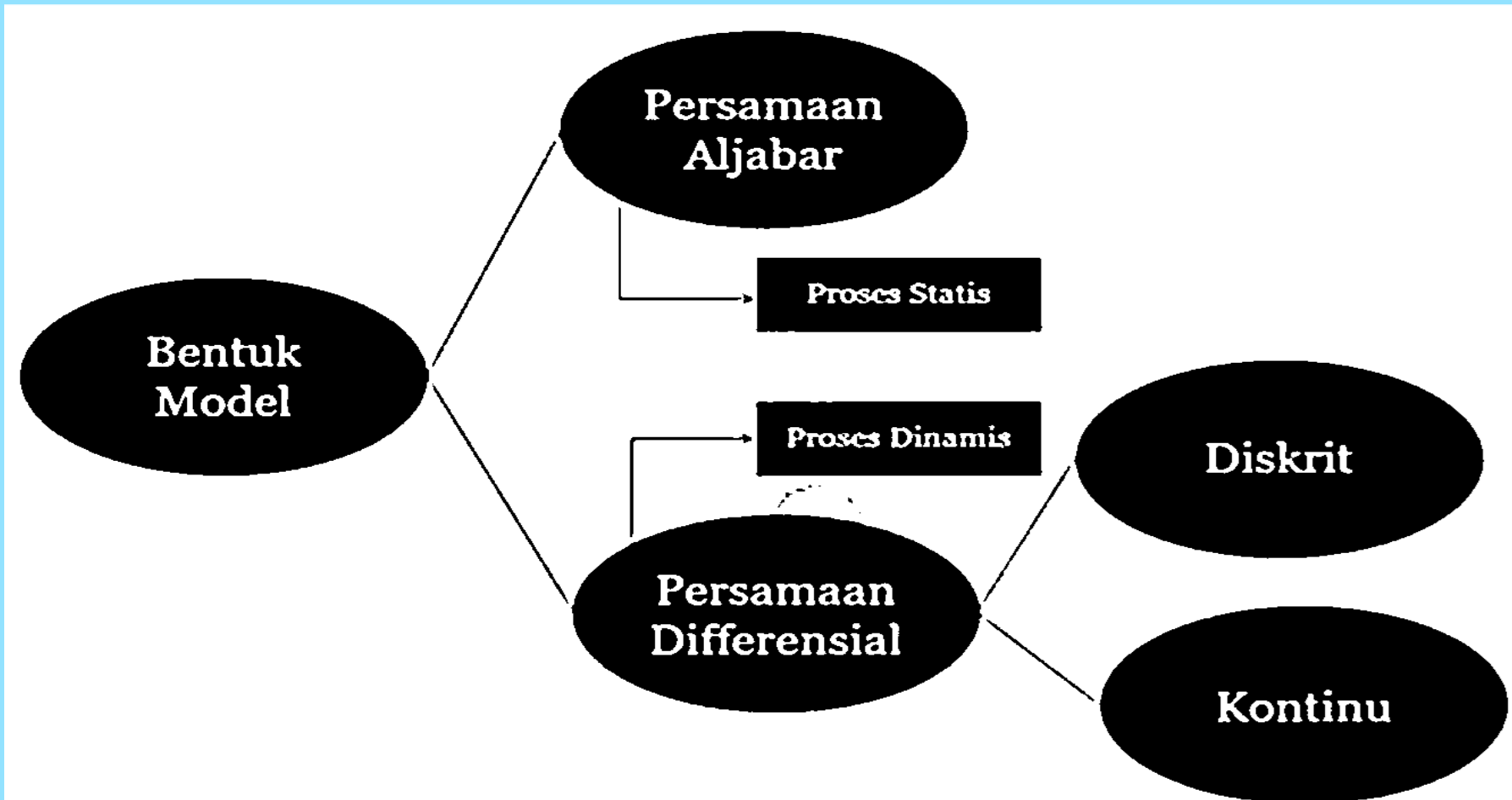
- **PEMODELAN**

- Merupakan cara yang praktis dalam penyelesaian suatu masalah dalam system kendali.



# Pendahuluan

- Skema Bentuk Model



# Pemodelan SISTEM MEKANIK

- Pemodelan pada system Mekanik, mengacu kepada Hukum Kedua Newton.

## 1. Gerak (translasi)

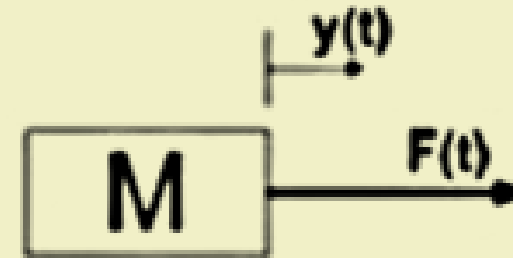
Pemodelan sistem mekanik mengacu pada hukum kedua Newton tentang gerak yaitu :

$$ma = \Sigma F \quad (3-1)$$

dengan  $m$  = massa, kg

$a$  = percepatan,  $m/det^2$

$F$  = gaya, N



Gambar 3.1 Sistem mekanik

- Jika benda ditarik dengan gaya  $F$  maka akan terjadi perpindahan.
- Pada gambar  $y(t)$  merupakan perpindahannya.
- Jumlah gaya pada benda ( $M$ ) sama dengan massa  $\times$  percepatan

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

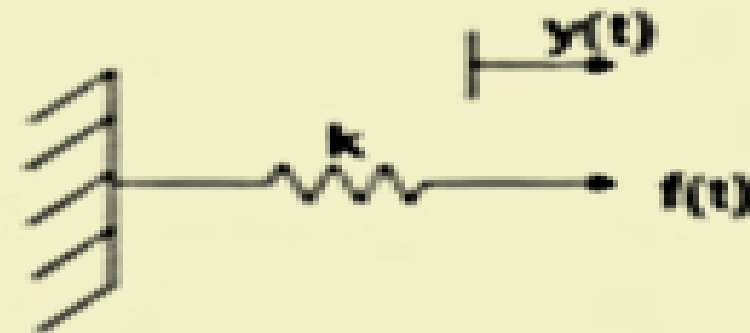
## 2. Pegas Linier

- *Pegas Linier*

$$f(t) = Ky(t)$$

dengan  $K$  adalah konstanta pegas

- Jika pegas ditarik, maka akan terjadi perpindahan karena adanya gaya  $f$



Gambar 3.2 Sistem pegas

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

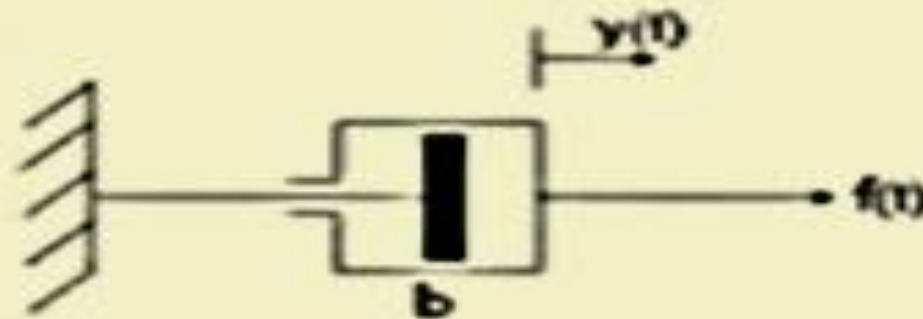
## 3. Gesekan Liat (Piston)

- *Gesekan Liat(Piston)*

$$f(t) = B \frac{dy}{dt}$$

dengan B adalah koefisien gesekan.

- Jika piston ditarik atau ditekan, maka akan terjadi perpindahan karena adanya gaya  $f$ .
- $dy/dt$  merupakan turunan perpindahan dari  $y$



Gambar 3.3 Sistem Gesekan

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## Contoh 1 : Gerak Translasi

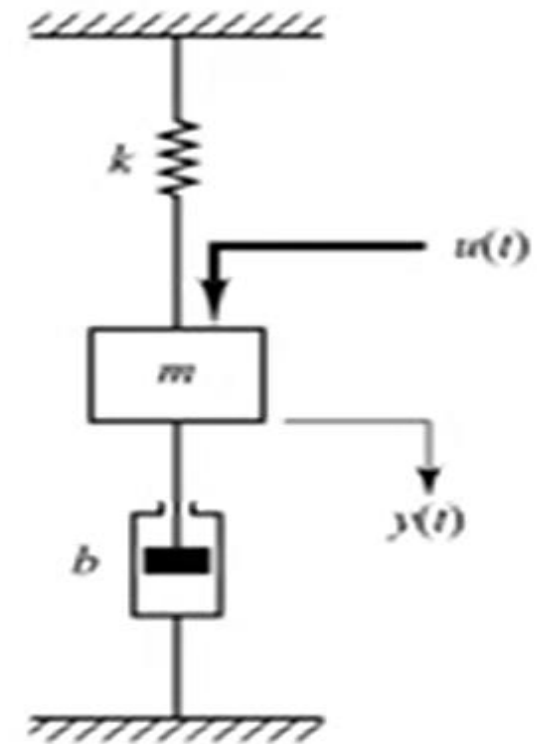
- Tentukan model Matematika system berikut ini:

dengan  $F$  = input (gaya) ;  $x$  = output (pergeseran)

$k$  = konstanta pegas

$m$  = massa

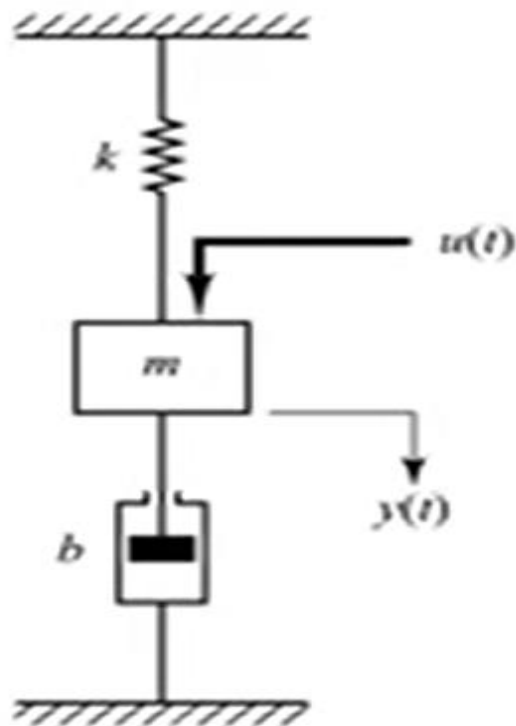
$b$  = koefisien gesekan (piston)



**Figure 2-15**  
Mechanical system.

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## Penyelesaian:



**Figure 2-15**  
Mechanical system.

Berlaku hukum Newton II, yaitu  
 $\Sigma F = m \cdot a$

Persamaan Differensial system adalah:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$\Sigma F = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

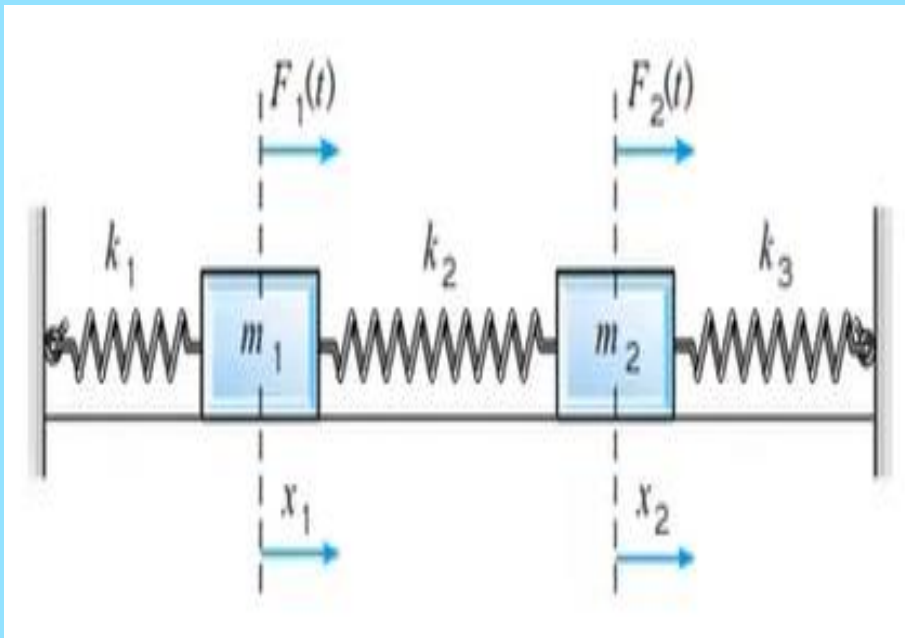
$$u - k \cdot y - b \frac{dy}{dt} = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Sehingga:

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k \cdot y = u$$

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## • Contoh 2: Sistem Massa Pegas



Persamaan Differensial system adalah:

$$\sum F = m \cdot a$$

Massa  $m_1$  yaitu:

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1(t) - k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} = F_1(t) - x_1 k_1 + x_1 (k_1 + k_2)$$

Massa  $m_2$  yaitu:

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2(t) - k_3 x_2 - k_2 (x_2 - x_1)$$

$$m_2 \cdot \frac{d^2 x_2}{dt^2} = F_2(t) - x_1 k_2 - x_2 (k_2 + k_3)$$

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

| Gerak Translasi              |                          | Gerak Rotasi                      |                               | Hubungan           |
|------------------------------|--------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|--------------------|
| Pergeseran Linear            | $x$                      | Pergeseran Sudut                  | $\theta$                      | $x = \theta R$     |
| Kecepatan Linear             | $v$                      | Kecepatan Sudut                   | $\omega$                      | $v = \omega R$     |
| Percepatan Linear            | $a$                      | Percepatan Sudut                  | $\alpha$                      | $a = \alpha R$     |
| Kelembaman Translasi (massa) | $m$                      | Kelembaman Rotasi (momen inersia) | $I$                           | $I = \Sigma m R^2$ |
| Gaya                         | $F$                      | Momen Gaya                        | $\tau$                        | $\tau = F R$       |
| Energi Kinetik               | $EK = \frac{1}{2} m v^2$ | Energi Kinetik                    | $EK = \frac{1}{2} I \omega^2$ | -----              |
| Daya                         | $P = F v$                | Daya                              | $P = \tau \omega$             | -----              |
| Momentum Linear              | $P = m v$                | Momentum Sudut                    | $L = I \omega$                | -----              |

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## 4. Gerak (Rotasi)

→ Berlaku Hukum kedua Newton tentang gerak rotasi:

$$T(t) = J\alpha(t) = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

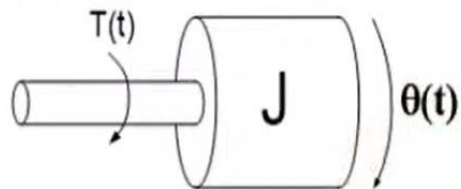
dengan  $T$  = torsi yang diberikan

$\alpha$  = percepatan sudut beban, rad/det<sup>2</sup>

$J$  = momen inersia, kg · m<sup>2</sup>

$\omega$  = kecepatan sudut, rad/det

$\theta$  = pergeseran sudut, rad



Demikian pula untuk :

- *Pegas puntir*  $T(t) = K\theta(t)$

dengan  $K$  adalah konstanta pegas

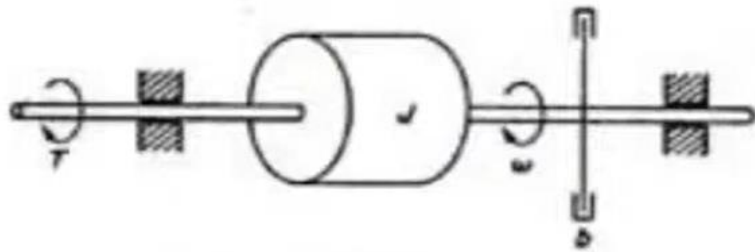
- *Gesekan*  $T(t) = b \frac{d\theta}{dt}$

dengan  $b$  adalah koefisien gesek rotasi

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## Contoh 3 : Gerak Rotasi

- Tentukan model Matematika system berikut ini:



Gambar 3.6 Sistem Rotasi

Dengan

- |          |                                          |   |              |
|----------|------------------------------------------|---|--------------|
| J        | = momen inersia, kg-m <sup>2</sup>       | b | = gaya gesek |
| f        | = koefisien gesek, N-m/rad/det           |   |              |
| $\omega$ | = kecepatan sudut, rad/det               |   |              |
| T        | = torsi, N-m                             |   |              |
| $\alpha$ | = percepatan sudut, rad/det <sup>2</sup> |   |              |
| $\theta$ | = pergeseran sudut, rad                  |   |              |

Berlaku hukum Newton II, yaitu  
 $\Sigma F = m \cdot a$

Persamaan Differensial system adalah:

$$\Sigma T = J \cdot \alpha$$
$$T - b \cdot \omega = J \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

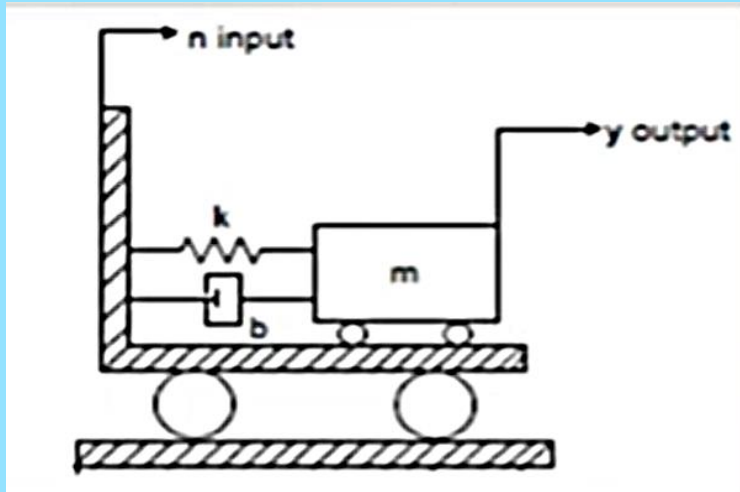
Jumlah torsi dikurang gesekan b (dikurang karena berlawanan arah)

Sehingga:

$$J \cdot \frac{d\omega}{dt} + b \cdot \omega = T$$

# Pemodelan SISTEM MEKANIK

## • Contoh 4 : Gerak Benda



pada  $t < 0$  : sistem tak bergerak  
pada  $t = 0$  gerobak di gerakan  
Dengan kecepatan konstan

$$\frac{dx}{dt} = \text{konstan}$$

$y$  = output relatif terhadap ground

Berlaku hukum Newton II, yaitu  
 $\Sigma F = m \cdot a$

Persamaan Differensial system adalah:

$$\Sigma F = m \cdot a$$

$$\Sigma F = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Bila perpindahan pada input dalah  $n$ , maka

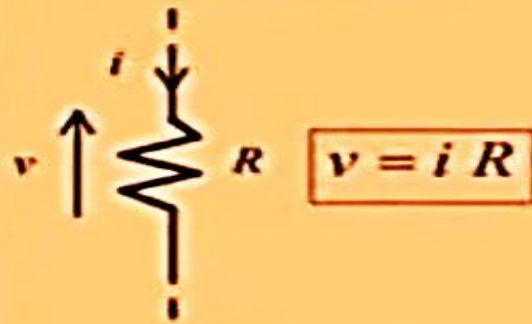
$$b \frac{dy}{dt} + ky - b \frac{dn}{dt} - kn = m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Sehingga:

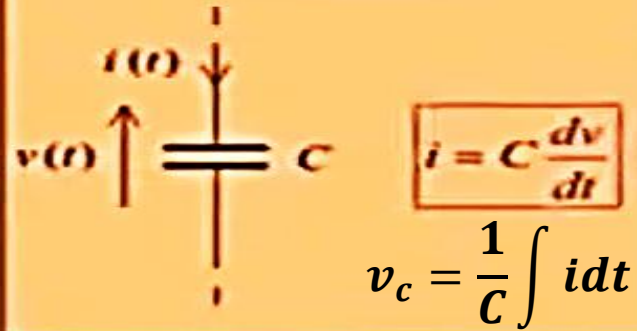
$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + k \cdot y = b \frac{dn}{dt} - kn$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

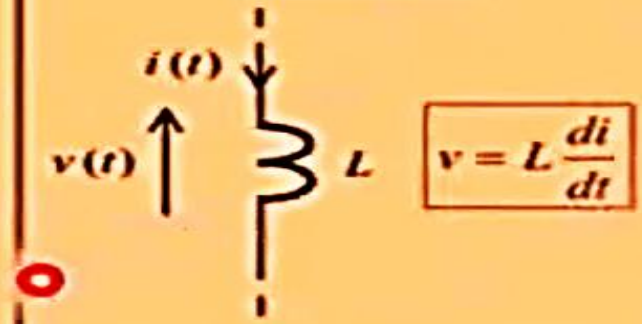
resistor



kapasitor

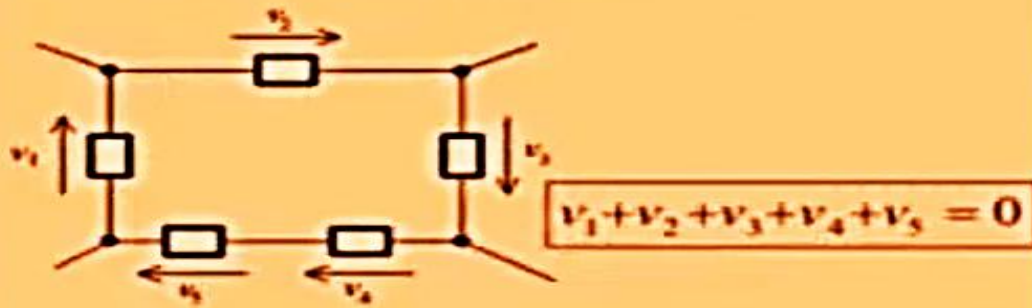


induktor



## Kirchhoff's Voltage Law (KVL):

*The sum of voltage drops around any close loop in a circuit is 0.*



## Kirchhoff's Current Law (KCL):

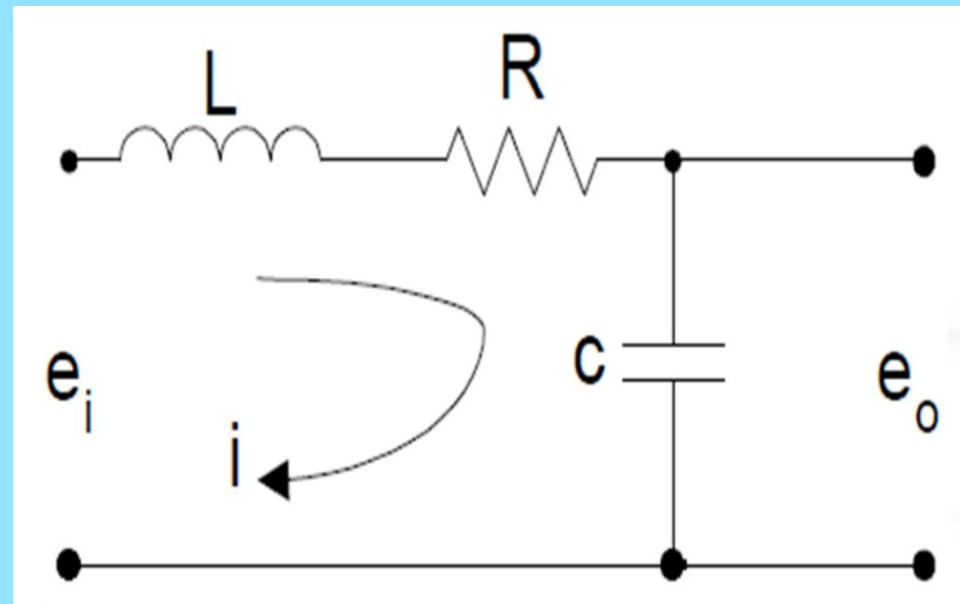
*The sum of currents entering/leaving a node/closed surface is 0.*



# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- Contoh 5: Sistem Rangkaian RLC

Tentukan dalam persamaan laplace perbandingan nilai  $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$

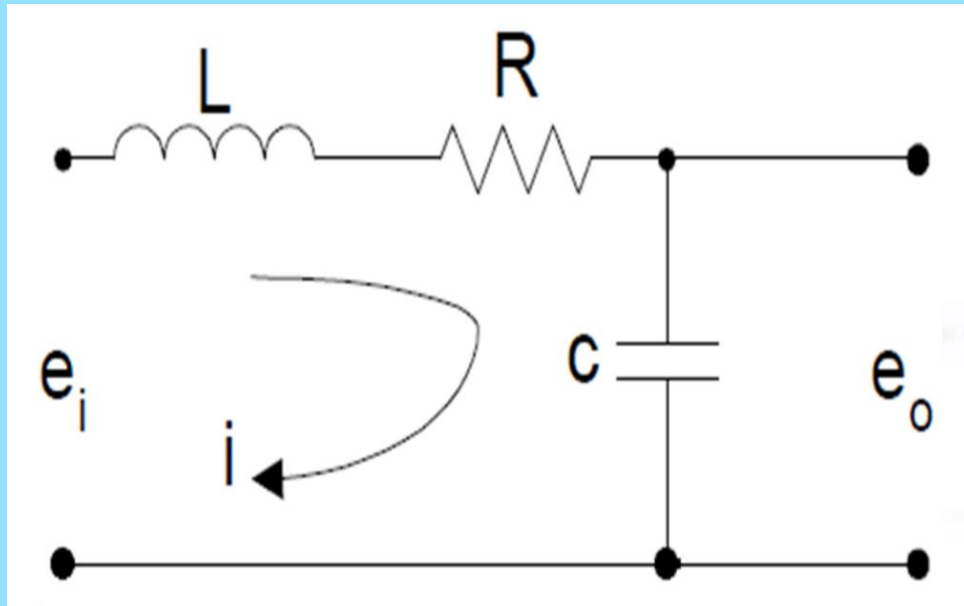


# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Penyelesaian;**

1. Transformasi Rangkaian ke Domain-s

- Pertama, ubah setiap komponen ke dalam bentuk impedansinya di domain Laplace (domain-s):



- Tegangan masukan  $e_i(t)$  menjadi  $E_i(s)$
- Tegangan keluaran  $e_o(t)$  menjadi  $E_o(s)$
- Resistor ( $R$ ) memiliki impedansi  $Z_R = R$
- Induktor ( $L$ ) memiliki impedansi  $Z_L = Ls$
- Kapasitor ( $C$ ) memiliki impedansi  $Z_C = \frac{1}{Cs}$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

## Lanjutan Penyelesaian;

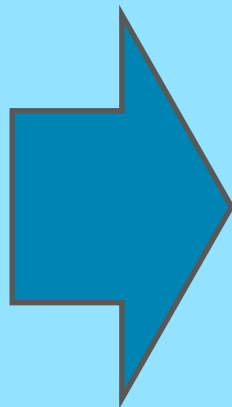
### 2. Gunakan Aturan Pembagi Tegangan (Voltage Divider)

- Tegangan keluaran  $E_o(s)$  adalah tegangan yang melewati kapasitor, menggunakan aturan pembagi tegangan:

$$E_o(s) = E_i(s) \cdot \frac{\text{Impedansi pada output}}{\text{Total impedansi seri}}$$

- Substitusikan nilai impedansi masing masing:

$$E_o(s) = E_i(s) \cdot \frac{Z_C}{Z_L + Z_R + Z_C}$$



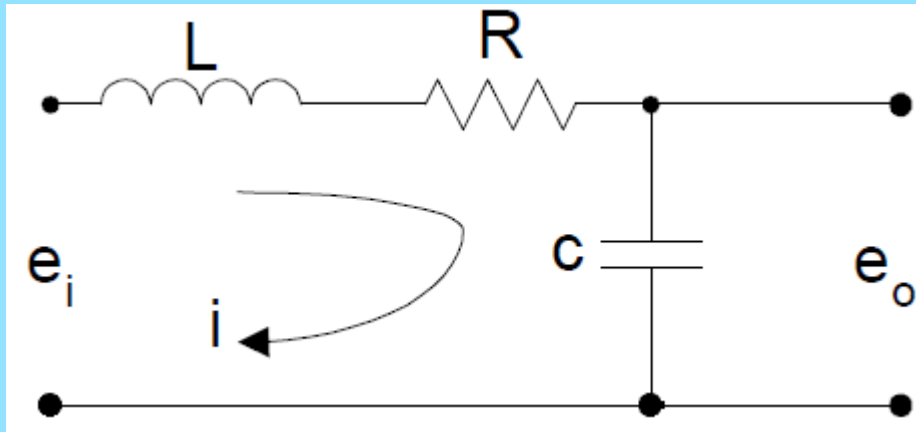
kalikan bagian atas (pembilang) dan bawah (penyebut) dengan  $Cs$ :

$$E_o(s) = E_i(s) \cdot \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} \cdot (Cs)}{(Ls + R + \frac{1}{Cs}) \cdot (Cs)}$$

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# Penyelesaian contoh 5 dengan cara berbeda



Hukum Fisis : Kirchoff

Persamaan dinamis sistem/Persamaan differensial

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = e_i$$

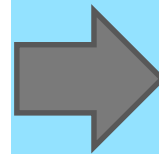
$$\frac{1}{C} \int i dt = e_o$$

Dalam bentuk Laplace : (anggap kondisi mula = 0)

$$sLI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s) = E_i(s)$$

$$\frac{1}{sC} I(s) = E_o(s) \rightarrow \frac{I(s)}{C} = sE_o(s)$$

$$s^2 LI(s) + RsI(s) + \frac{I(s)}{C} = sE_i(s)$$



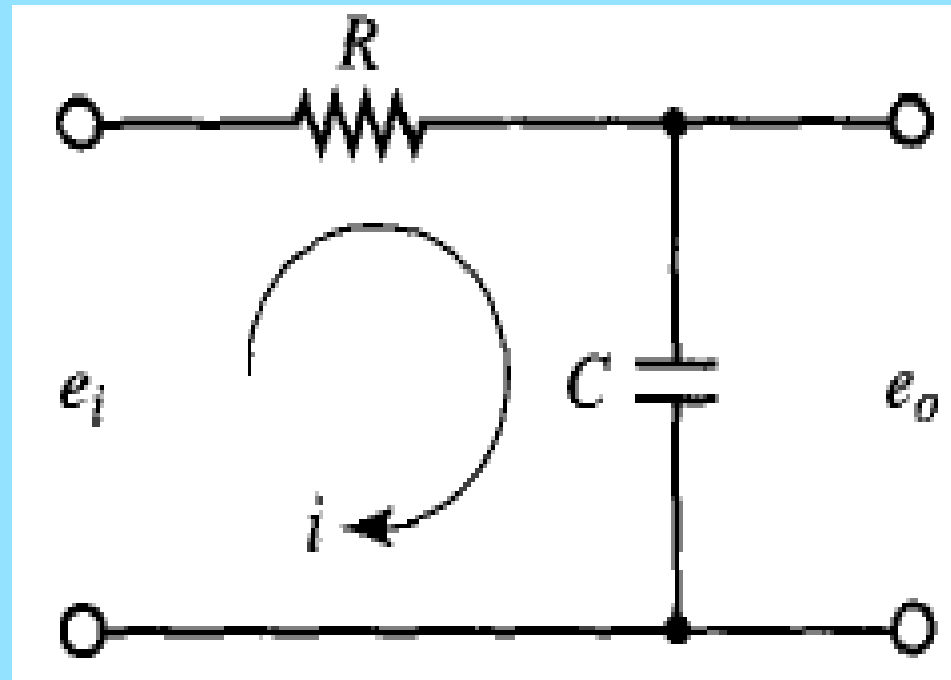
Maka Fungsi Alih nya :

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{I(s)}{C}}{\left(s^2 L + Rs + \frac{1}{C}\right) I(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- Contoh 6: Sistem Rangkaian RC

Tentukan dalam persamaan laplace perbandingan nilai  $\frac{E_o(s)}{E_i(s)}$

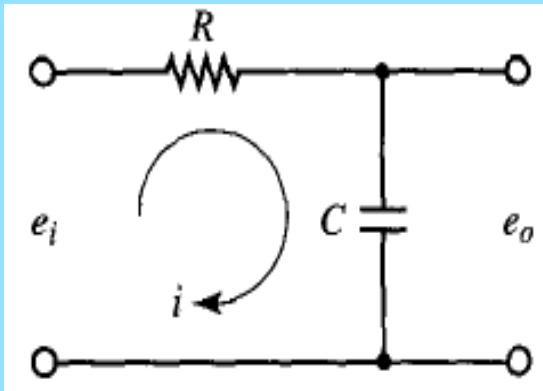


# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Penyelesaian;**

1. Transformasi Rangkaian ke Domain-s

- Pertama, ubah setiap komponen ke dalam bentuk impedansinya di domain Laplace (domain-s):



- Tegangan masukan  $e_i$  menjadi  $E_i(s)$
- Tegangan keluaran  $e_o$  menjadi  $E_o(s)$
- Resistor ( $R$ ) memiliki impedansi  $Z_R = R$
- Kapasitor ( $C$ ) memiliki impedansi  $Z_C = \frac{1}{Cs}$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

## Lanjutan Penyelesaian;

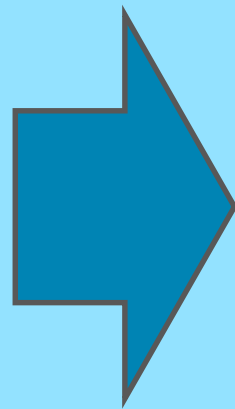
### 2. Gunakan Aturan Pembagi Tegangan (Voltage Divider)

- Tegangan keluaran  $E_o(s)$  adalah tegangan yang melewati kapasitor, menggunakan aturan pembagi tegangan:

$$E_o(s) = E_i(s) \cdot \frac{\text{Impedansi pada output}}{\text{Total impedansi seri}}$$

- Substitusikan nilai impedansi masing masing:

$$E_o(s) = E_i(s) \cdot \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$



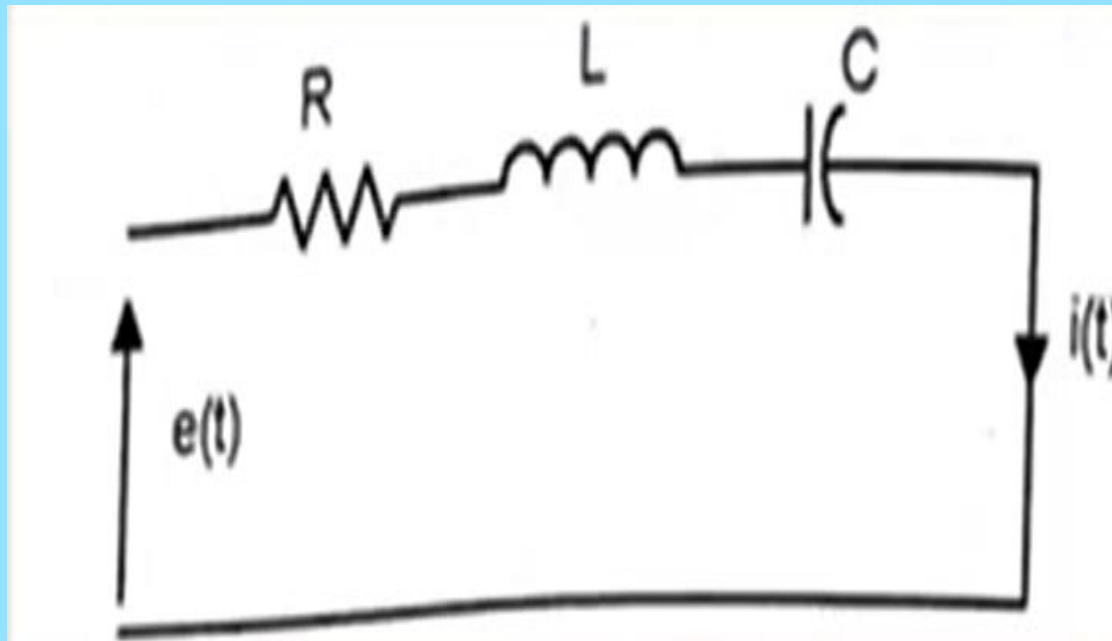
$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}$$

kalikan bagian atas (pembilang) dan bawah (penyebut) dengan  $Cs$ :

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs} \cdot (Cs)}{(R + \frac{1}{Cs}) \cdot (Cs)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- Contoh 6: Sistem Rangkaian RLC seri, Dengan asumsi bahwa arus  $i(t)$  adalah output dari system, tentukan nilai laplace dari  $\frac{I(s)}{E(s)}$

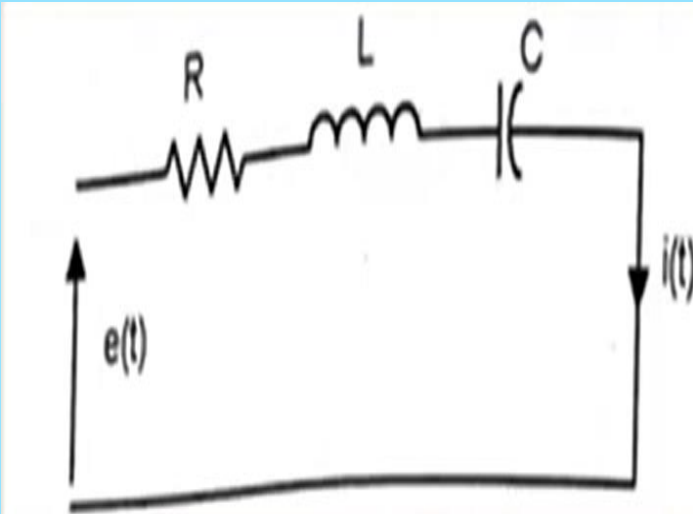


# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Penyelesaian;**

1. Transformasi Rangkaian ke Domain-s

- Pertama, ubah setiap komponen ke dalam bentuk impedansinya di domain Laplace (domain-s):



- Tegangan sumber  $e(t)$  menjadi  $E(s)$
- Arus  $i(t)$  menjadi  $I(s)$
- Impedansi Resistor:  $Z_R = R$
- Impedansi Induktor:  $Z_L = Ls$
- Impedansi Kapasitor:  $Z_C = \frac{1}{Cs}$

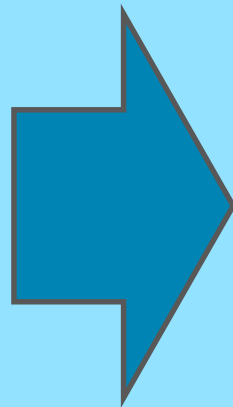
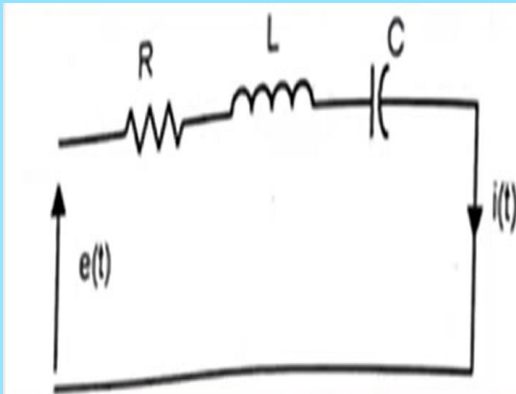
# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

Lanjutan Penyelesaian;

## 2. Terapkan Hukum Tegangan Kirchhoff (KVL)

Menurut KVL, jumlah total tegangan pada komponen dalam satu loop tertutup sama dengan

$$V_R(s) + V_L(s) + V_C(s) = E(s)$$



Dengan menggunakan Hukum Ohm untuk impedansi ( $V(s)=I(s) \cdot Z(s)$ )

$$I(s)R + I(s)Ls + I(s)\frac{1}{Cs} = E(s)$$

Susun Ulang Persamaan, Faktorkan arus  $I(s)$  dari sisi kiri persamaan:

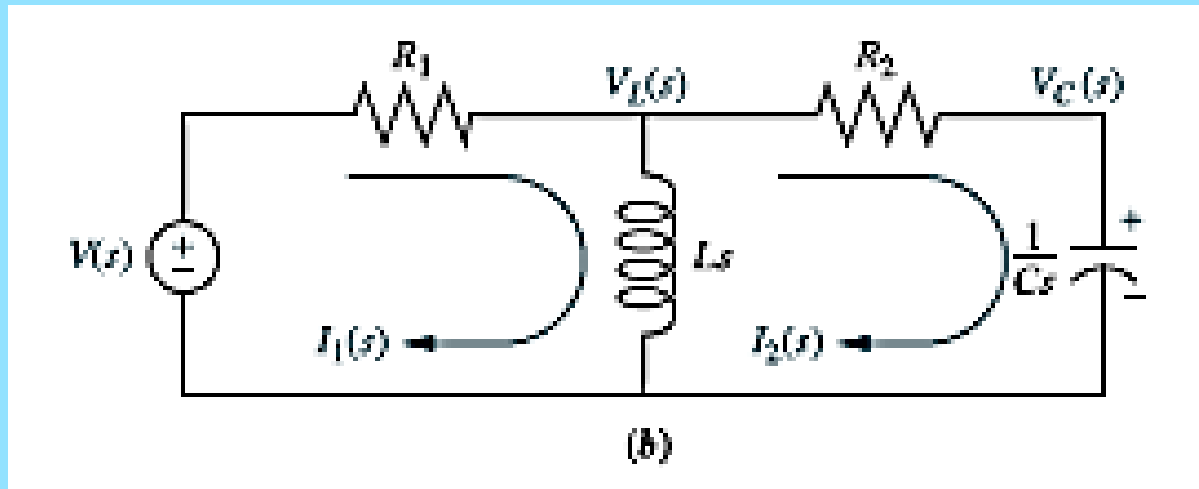
$$I(s) \left( R + Ls + \frac{1}{Cs} \right) = E(s)$$



$$\frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}}$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- Contoh 7: Sistem Rangkaian dengan 2 loop, Tentukan dalam persamaan laplace perbandingan nilai  $\frac{V_c(s)}{V(s)}$



# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

## Penyelesaian

- Terapkan KVL pada Setiap Loop

Loop 1 (Arus  $I_1(s)$ )  $\rightarrow$  Jumlah tegangan pada loop kiri adalah nol.

$$-V(s) + R_1 I_1(s) + Ls(I_1(s) - I_2(s)) = 0$$

susun ulang berdasarkan  $I_1$  dan  $I_2$ :

$$(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$$

.....(Pers. 1)

- Loop 2 (Arus  $I_2(s)$ )  $\rightarrow$  Jumlah tegangan pada loop kanan adalah nol

$$Ls(I_2(s) - I_1(s)) + R_2 I_2(s) + \frac{1}{Cs} I_2(s) = 0$$

$$-LsI_1(s) + \left( Ls + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s) = 0$$

.....(Pers. 2)

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

## Penyelesaian

- Dari Persamaan 2, kita dapatkan ekspresi untuk  $I_1(s)$ :

$$LsI_1(s) = \left( Ls + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s)$$

$$I_1(s) = \frac{1}{Ls} \left( Ls + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s)$$

- Substitusikan  $I_1(s)$  ini ke persamaan 1:
- Persamaan 1   $(R_1 + Ls)I_1(s) - LsI_2(s) = V(s)$

diperoleh 
$$(R_1 + Ls) \left[ \frac{1}{Ls} \left( Ls + R_2 + \frac{1}{Cs} \right) I_2(s) \right] - LsI_2(s) = V(s)$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- selesaikan untuk  $I_2(s)$ , penyederhanaan dengan **mengalikan semua suku** dengan  $Cs$  untuk menghilangkan penyebut

$$I_2(s) = V(s) \cdot \frac{LCs^2}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

- Substitusikan ekspresi  $I_2(s)$  yang kita

$$V_c(s) = \left( V(s) \cdot \frac{LCs^2}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1} \right) \cdot \frac{1}{Cs}$$

$$V_c(s) = V(s) \cdot \frac{Ls}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- Substitusikan ekspresi  $I_2(s)$  yang kita

$$I_2(s) = V(s) \cdot \frac{LCs^2}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

$$V_c(s) = \left( V(s) \cdot \frac{LCs^2}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1} \right) \cdot \frac{1}{Cs}$$

$$V_c(s) = V(s) \cdot \frac{Ls}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

Sehingga

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{Ls}{LC(R_1 + R_2)s^2 + (R_1R_2C + L)s + R_1}$$

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Contoh 5: Sistem Rangkaian**

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Contoh 5: Sistem Rangkaian**

# Pemodelan SISTEM ELEKTRIK

- **Contoh 5: Sistem Rangkaian**