PERTEMUAN-3A

MODEL MATEMATIKA SISTEM KENDALI
TRANSFORMASI LAPLACE

Umi Murdika,M.T.

- Kemampuan akhir yang diharapkan,

Mahasiswa:

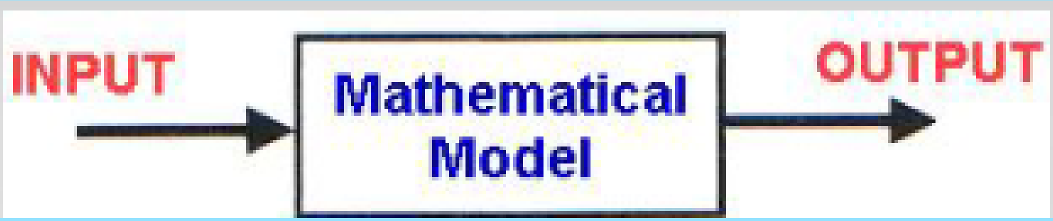
1. Mengenal bahwa persamaan differensial dapat menggambarkan perilaku dinamis dari system fisik.
2. Memahami Penerapan Transformasi Laplace dan penggunaannya untuk mendapatkan fungsi Alih
3. Memahami peran penting pemodelan dalam proses Desain system Kontrol

PEMODELAN Sistem Kontrol

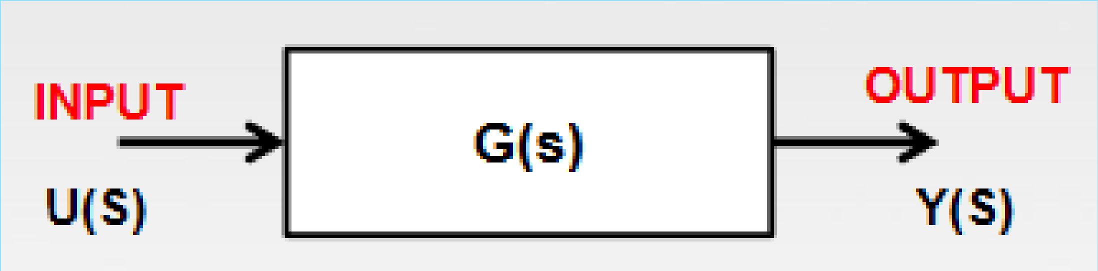
- Pemodelan Sistem Kontrol, meliputi:
  1. Pendahuluan
  2. Klasifikasi Sistem
  3. **Transformasi Laplace : Teori Pendukung Pemodelan**
  4. Pemodelan dengan Persamaan Differensial
  5. Pemodelan dengan Fungsi Transfer (fungsi Alih) dan Diagram Blok Fungsi transfer/alih
  6. Pemodelan dengan Ruang keadaan (*State Space Model*)
  7. Pemodelan Grafik aliran sinyal

PENDAHULUAN(1)

- Untuk memahami dan mengendalikan system yang kompleks, harus memperoleh model matematika dari system tersebut.



- Persamaan matematis yang menunjukkan hubungan antara input dan output sistem.
- Dengan mengetahui model matematisnya, maka tingkah laku sistem dapat dianalisa



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

PENDAHULUAN(1)

- **Untuk memahami dan mengendalikan system yang kompleks, harus memperoleh model matematika dari system tersebut,**
- **Karena itu perlu untuk menganalisis hubungan antara variable system untuk mendapatkan model matematika**
- **Karena system yang dianalisis biasanya bersifat dinamis, maka menggunakan persamaan differensial.**
- **Jika persamaan ini biasa dilinierisasi, maka digunakan transformasi laplace untuk menyederhanakan solusi dari pemodelan.**

PENDAHULUAN(2)

- **Secara Preaktek, kompleksitas system dan ketidaktahuan kita tentang semua factor yg relevan, mengharuskan kita melakukan asumsi tentang suatu system**
- **Oleh karena itu, perlu mempertimbangkan system fisik dg asumsi yang diberikan, kemudian melakukan linierisasi system**
- **Menggunakan hukum fisika yang menggambarkan ekuivalensi dari system linier, sehingga memperoleh satu persamaan differensial linier**
- **Dan dengan menggunakan ilmu matematika, seperti Transformasi Laplace, akan diperoleh solusi yang menggambarkan kerja dari suatu system.**

PENDAHULUAN(3)

- **Secara ringkas, pendekatan pemodelan system dinamis, dapat dilakukan melelui beberapa tahapan, yaitu:**
  1. **Menentukan system dan komponennya.**
  2. **Merumuskan model matematika dan asumsi mendasar yang diperlukan berdasarkan prinsip prinsip dasar**
  3. **Mendapatkan persamaan differensial yang mewakili model matematika.**
  4. **Memecahkan persamaan untuk variable output yang diinginkan**
  5. **Memeriksa solusi dan asumsi**
  6. **Jika perlu, melakukan analisis atau desain ulang system control.**

2. KLASIFIKASI SISTEM

1. LINEAR <> NON-LINEAR
2. TIME–INVARIANT <> TIME-VARYING
3. CONTINUOUS-TIME <> DISCRETE-TIME
4. DETERMINISTIC <> STOCHASTIC
5. LUMPED <> DISTRIBUTED-PARAMETERS
6. TRANSFER FUNCTION <> STATE-SPACE

LINEAR <> NON-LINEAR

- Sistem fisis umumnya bersifat non linear dalam tingkat tertentu.
- Untuk daerah kerja yang kecil, system nonlinear dapat dianggap linear (*piece-wise linearisation*)
- Sistem linier: hukum superposisi akan berlaku, dimana respon suatu system terhadap beberapa input berbeda merupakan kombinasi respon masing-masing input.
- Pengujian kelinearan suatu system melalui input sinusoidal.
- Dalam beberapa elemen-elemen non linier sengaja disertakan dalam system kendali untuk optimasi unjuk kerja
  - Misalnya, relay on-off dipakai pada system control optimal waktu, system kendali pesawat dan system peluru kendali.

TIME–INVARIANT <> TIME-VARYING

- **Sistem time-invariant** memiliki parameter yang konstan (tidak tergantung waktu).
  - Responnya tidak tergantung pada saat kapan input diberikan.

- **Sistem time-varying** memiliki satu atau lebih parameter yang berubah terhdap waktu.
  - Responnya tergantung pada waktu diberikan input
  - Contoh system kendali time varying adalah system kendali pesawat ruang angkasa, yaitu bobot pesawat tsb akan berkurang seiring penggunaan konsumsi bahan bakar.

CONTINUOUS-TIME <> DISCRETE-TIME

- **CONTINUOUS-TIME : Sistem waktu kontinyu**, memiliki semua variable/sinyal yang kontinyu terhadap waktu.

- **DISCRETE-TIME : Sistem waktu Diskrit**, memiliki satu atau lebih variable/sinyal yang diskrit terhadap waktu.

DETERMINISTIC <> STOCHASTIC

- **Sistem Deterministik** : merupakan system yang memiliki respon terhadap suatu input yang dapat ditentukan atau diperkirakan dan biasanya terjadi secara konsisten(berulang)

- **Sistem Stokastik**: Merupakan system yang memiliki respon terhadap input yang tidak dapat ditentukan secara pasti dan tidak selalu menghasilkan output yang sama

LUMPED <> DISTRIBUTED-PARAMETERS

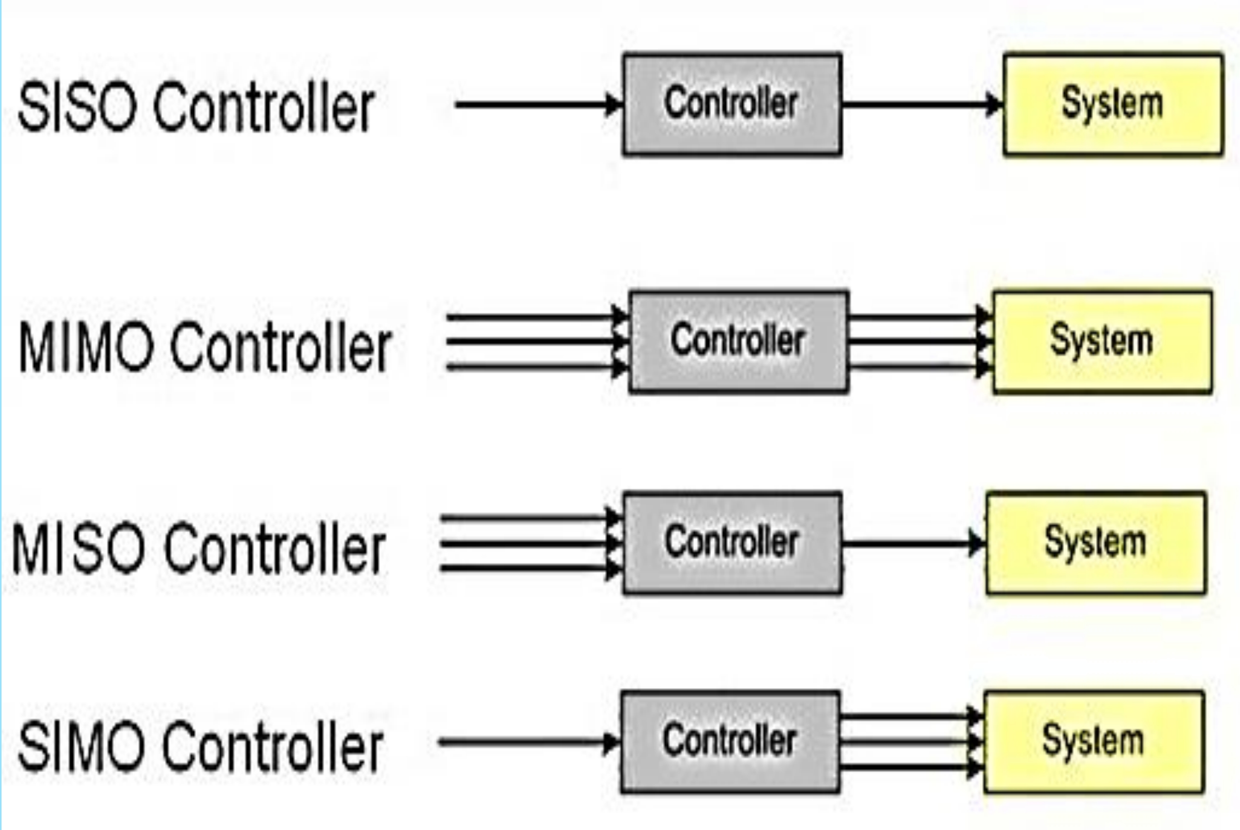
- Pemodelan komponen yang sederhana bila dapat dianggap bahwa parameter-parameter komponen tersebut dapat dimodelkan secara terkumpul di satu titik.
  - Dicirikan dengan penggunaan **persamaan differensial biasa**.

- Pemodelan parameter terdistribusi lebih tepat digunakan misalnya pada system transmisi.
  - Dicirikan dengan **persamaan diffrensial parsial.**

SISO Sistem

Klasifikasi sistem kendali berdasarkan jumlah sinyal input dan outputnya, dapat diklasifikasikan sebagai berikut. Yaitu

1. SISO (Single Input Single Output)
2. SIMO (Single Input Multi Output)
3. MISO (Multi Input Single Output)
4. MIMO (Multi Input Multi Output)



TRANSFER FUNCTION <> STATE-SPACE

- Analisis system sederhana, SISO (*single input single output*), yang bersifat linear, kontinyu, time-invariant, lump-parameters, deterministic, dapat dilakukan melalui **pendekatan tradisional (fungsi Alih)** yang merupakan **domain frekuensi kompleks**, dengan alat bantu perancangan berupa **Root Locus (domain Waktu), Bode plot atau Nyquist (domain Frekuensi).**

- Untuk system modern yang kompleks dan berakurasi tinggi ditandai dengan MIMO (*mullti input multi output*), non-linear, time varying, optimal, robust) harus menggunakan pendekatan ***state space*** yang bersifat **domain waktu**.

- **State space** merupakan metode analisis untuk sebuah sistem kendali yang kompleks. Metode ini digunakan untuk menganalisis sistem kendali dengan input banyak dan output banyak atau disebut MIMO (Multiple Inputs and Multiple Outputs).
- Umumnya kita mengenal root locus, analisis Nyquist, diagram bode dll untuk menganalisis system kendali yang sederhana yang hanya memiliki satu input dan satu output atau disebut SISO (Single Input and Single Output). Metode-metode ini disebut metode klasik dan sulit digunakan untuk menganalisis MIMO.

3. Transformasi Laplace : Teori Pendukung Pemodelan

- Transformasi Laplace mengkonversikan persamaan differensial (dalam *domain t*) ke dalam persamaan aljabar dalam *domain s* (*domain Frekuensi*).
- Transformasi Laplace memanipulasi persamaan aljabar dengan aturan sederhana untuk menghasilkan solusi dalam domain s.
- Solusi dalam domain t dapat diperoleh dengan melakukan operasi *inverse* transformasi Laplace

Transformasi Laplace

- Transformasi Laplace adalah suatu metode operasional yang dapat digunakan secara mudah untuk menyelesaikan persamaan diferensial linier.

- Dengan menggunakan transformasi Laplace, dapat diubah beberapa fungsi umum seperti fungsi sinusoida, fungsi sinusoida teredam, dan fungsi eksponensial menjadi fungsi-fungsi aljabar variabel kompleks

- Bila persamaan aljabar dalam dipecahkan, maka penyelesaian dari persamaan diferensial (transformasi Laplace balik dari variabel tidak bebas) dapat diperoleh dengan menggunakan tabel transformasi Laplace.

Transformasi Laplace

- Langkah-langkah pemecahan persamaan differensial menggunakan metode transformasi Laplace adalah:
  - Persamaan diferensial yang berada dalam kawasan waktu (t), ditransformasikan ke kawasan frekuensi (s) dengan transformasi Laplace.
  - Untuk mempermudah proses transformasi dapat digunakan tabel transformasi laplace.
  - Persamaan yang diperoleh dalam kawasan s tersebut adalah persamaan aljabar dari variabel s yang merupakan operator Laplace.
  - Penyelesaian yang diperoleh kemudian ditransformasi-balikkan ke dalam kawasan waktu.
  - Hasil transformasi balik ini menghasilkan penyelesaian persamaan dalam kawasan waktu.

Transformasi Laplace

- Transformasi Laplace adalah ***suatu metoda operasi yang dapat digunakan dengan mudah untuk menyelesaikan persamaan differensial linier.***

- Operasi seperti diferensial dan integral dapat digantikan dengan operasi aljabar dalam bidang kompleks.
- Keuntungan
  - Dapat meramalkan harga akhir maupun harga awal sistem.
  - Komponen transient dan steady state dapat diperoleh sekaligus.

Transformasi Laplace

- Secara umum Transformasi Laplace digunakan mentransformasikan sinyal atau sistem dari kawasan waktu-t ke kawasan-s.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

- Fungsi F(s) adalah transformasi Laplace dari f(t) yang adalah suatu frekuensi s, s = s+ jw

Transformasi Laplace Fungsi Khusus

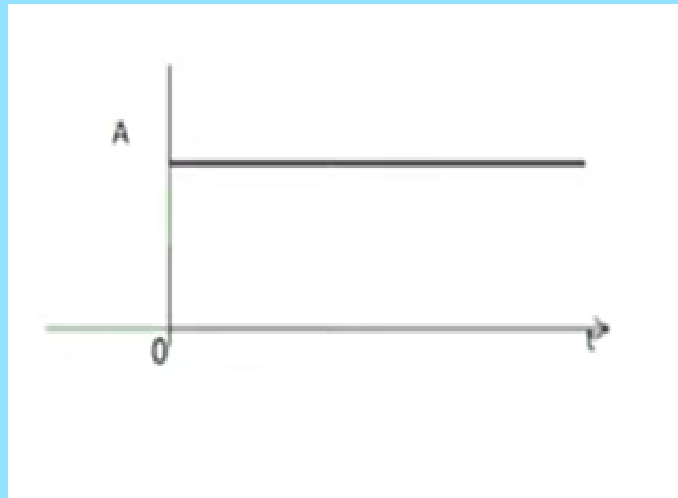
- **Fungsi Step** (Fungsi Tangga)

- F(t) = 0 untuk t < 0
- = A untuk t > 0

$$F(s) = \int_0^\infty A.e^{-st}.dt = -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{A}{s}(0-1)$$

$$= \frac{A}{s}$$



$$f(t) = \begin{cases} 0 & untuk\ t < 0 \\ A & untuk\ t > 0 \end{cases}$$

Transformasi Laplace Fungsi Khusus

- **Fungsi Impulse** (Fungsi Dirac)

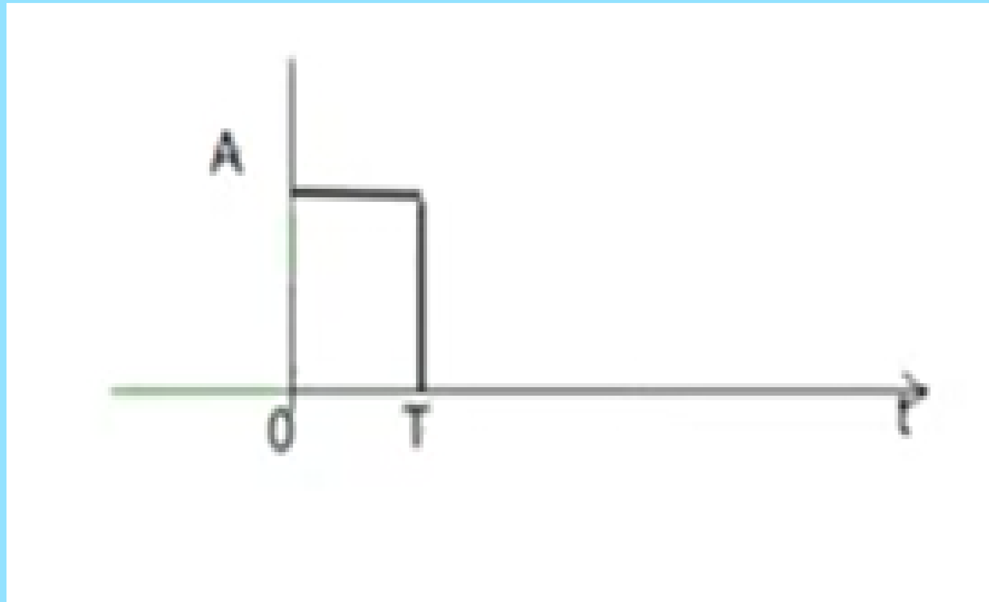
- $F(t) = 0$ untuk $t < 0$ & $t > T$
- $\quad = A$ untuk $0 \leq t \leq T$

$$F(s) = \int_0^\infty f(t).e^{-st}.dt \quad = \int_0^T A.e^{-st}.dt$$

$$= -\frac{A}{s}.e^{-st}\Big|_0^T$$

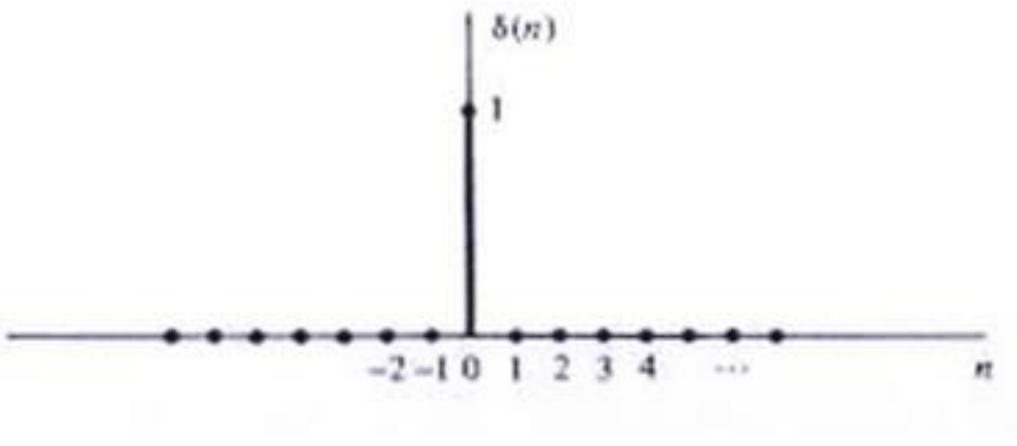
$$= -\frac{A}{s}(e^{-st} - 1)$$

$$= \frac{A}{s}(1 - e^{-st})$$



Transformasi Laplace Fungsi Khusus

- **Fungsi Impulse** (Fungsi Dirac)

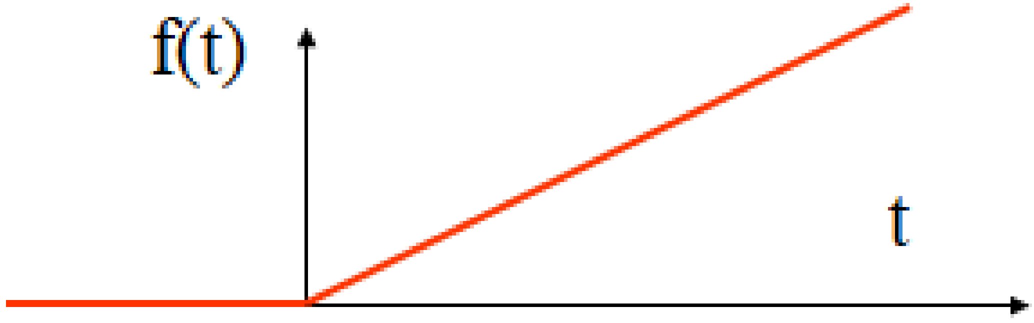


$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

$$\boxed{L[\delta(t)] = \int_0^\infty \delta(t) e^{-st} dt = 1}$$

Transformasi Laplace Fungsi Khusus

- **Fungsi Ramp** (Fungsi Tanjak)



$$f(t) = at \quad \text{untuk} \quad t > 0$$

$$\boxed{L[r(t)] = \int_0^\infty ate^{-st}dt = \left[\frac{-ate^{-st}}{s}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{-a}{s}e^{-st}dt = \frac{a}{s^2}}$$

Transformasi Laplace Fungsi Khusus

- **Fungsi Sinusoidal**
- $f(t) = \begin{cases} 0 & untuk\ t < 0 \\ A\ Sin\omega t & untuk\ t > 0 \end{cases}$

$$\mathbf{L}\{A \sin \omega t\} = \int_0^\infty A \sin \omega t\, e^{-st} dt$$

$$\left.\begin{aligned} e^{j\omega t} &= \cos \omega t + j \sin \omega t \\ e^{-jwt} &= \cos \omega t - j \sin \omega t \end{aligned}\right\} \quad \sin \omega t = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)$$

$$\mathbf{L}\{f(t)\} = \frac{A}{2j}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st} dt$$

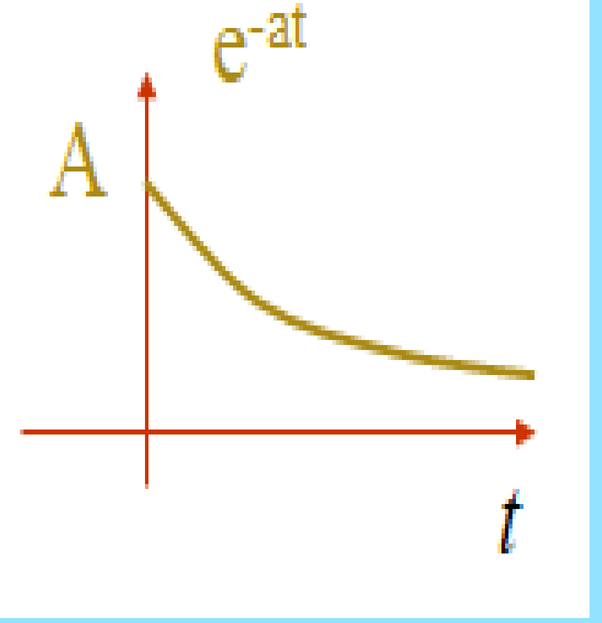
$$= \frac{A}{2j}\frac{1}{s - j\omega} - \frac{A}{2j}\frac{1}{s + j\omega} = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Transformasi Laplace Fungsi Khusus

- **Fungsi Eksponensial**
- $f(t) = \begin{cases} 0 & untuk\ t < 0 \\ A\,e^{-at} & untuk\ t > 0 \end{cases}$

$$L\{Ae^{-at}\} = \int_0^\infty Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^\infty e^{-(s+a)t}dt$$

$$= A\left[\frac{-e^{-(s+a)t}}{(s+a)}\right]_0^\infty = \frac{A}{(s+a)}$$



Tabel Transformasi Laplace

No	$f(t)$	$F(s)$
1	Impuls satuan $\delta(t)$	1
2	Unit step $u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	t^n, dimana $n = 1,2,3\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
6	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
7	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
9	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$

SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE

No	Sifat	Transformasi
1	Linear	• $L(af(t)+bg(t))=aF(s)+bG(s)$ • $L^{-1}(cF(t)+dG(t))=cf(t)+dg(t)$
2	Pergeseran sumbu t	$L(f(t-a))=e^{-as}f(s)$
3	Pergeseran sumbu s	$L(e^{at}f(t))=F(s-a)$
4	Skala	$L(f(at))=\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
5	Turunan	• $L\left(\frac{df}{dt}\right)=sF(s)-f(0)$ • $L\left(\frac{d^2f}{dt^2}\right)=s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$ • $L\left(\frac{d^nf}{dt^n}\right)=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-...-f(n-1)(0)$
6	Integral	$L\left(\int_{-\infty}^{t}f(x)dx\right)=\frac{F(s)}{s}+\int_{-\infty}^{0}f(x)dx$
7	Perkalian dengan t	• $L(tf(t))=-\frac{dF(s)}{ds}$ • $L(t^2f(t))=-\frac{d^2F(s)}{ds^2}$ • $L(t^nf(t))=(-)^n\frac{d^nF(s)}{ds^n}$
8	Pembagian oleh t	$L\left(\frac{f(t)}{t}\right)=\int_{s}^{\infty}F(y)dy$ $L(f(t)*g(t))=F(s)G(s)$

SIFAT-SIFAT TRANSFORMASI LAPLACE

1. Kombinasi Linear

   Jika $f1(t)$ dan $f2(t)$ adalah dua fungsi waktu yang berbeda maka

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \int_0^{\infty} [f_1(t) + f_2(t)] e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_2(t) e^{-st} dt$$

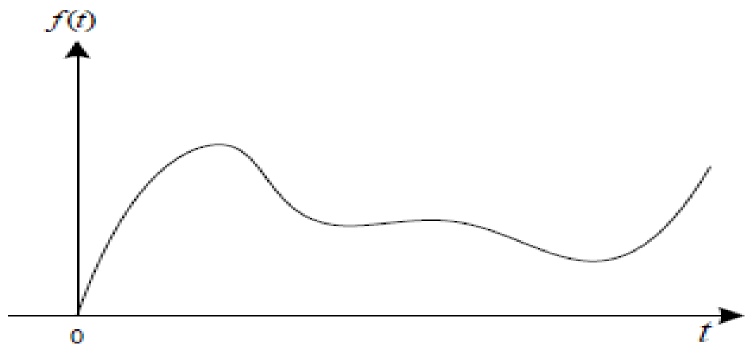
$$= \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)]$$

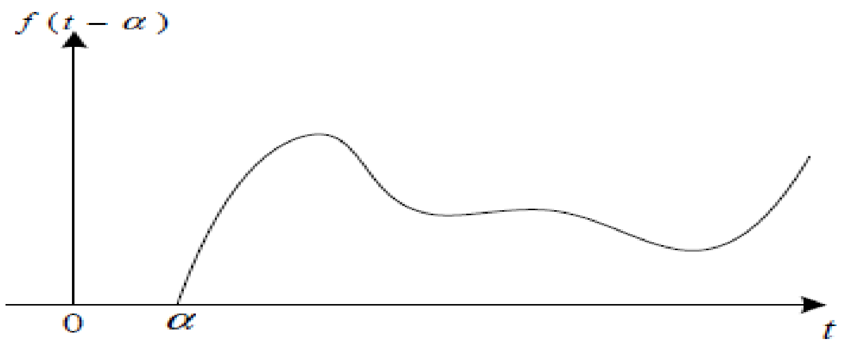
2. Translasi Fungsi

kita akan mencari transformasi Laplace dari fungsi yang ditranslasikan, $f(t -$ disini ,

$f(t) \to 0$ untuk nilai $t < 0$ atau dengan kata lain

$f(t - \alpha) \to 0$ untuk nilai $t < \alpha$





Karena $f(t - \alpha) = 0\ untuk\ 0 < t < \alpha$, maka

$$F(s) = \int_0^\infty f(u)\, e^{-su} du \qquad dimana\ u = t - \alpha$$

$$= \int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-s(t-\alpha)} dt$$

$$= e^{\alpha s} \int_0^\infty f(t-\alpha)\, e^{-st} dt$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[f(t-\alpha)] = e^{-\alpha s} F(s)$$

3. Perkalian $f(t)$ dengan $e^{-\alpha t}$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty e^{-\alpha t}f(t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st-\alpha t}dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt$$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-(s+\alpha)t}dt = F(s+\alpha)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$$

4. Penskalaan Waktu $f\left(\frac{t}{\alpha}\right)$

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha s t}{\alpha}} d\left(\frac{t}{\alpha}\right)$$

$$= \int_0^\infty f\left(\frac{t}{\alpha}\right) e^{-\frac{\alpha s t}{\alpha}} d\left(\frac{t}{\alpha}\right) \qquad jika\, \frac{t}{\alpha} = \tau$$

$$= \int_0^\infty f(\tau) e^{-\alpha s \tau} d(\tau)$$

$$= \alpha F(s)$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right] = \alpha F(s)$$

5. Diferensiasi

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt$$

Persamaan diatas dapat diintegralkan secara p
$u = e^{-st} \quad dan \quad dv = df(t)$ kemudian disisipk

$$\int_0^\infty udv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty vdu$$

Karena $du = -se^{-st}\ dan\ v = f(t)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = \int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty -se^{-st}f(t)dt$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = [e^{-s\infty}f(\infty) - e^{-s0}f(0)] + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = -f(0) + sF(s)}$$

maka dapat disimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Untuk turunan berikutnya

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt}f(t)\right] = s^2F(s) - sf(0) - \frac{d}{dt}f(0)}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt}f(t)\right] = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}\frac{d}{dt}f(0) - \cdots + \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}f(0)$$

6. Integral

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(t)\right] e^{-st}\,dt$$

Dengan integral parsial diperoleh :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \left[\int_0^t f(t)\right] \frac{e^{-st}}{-s}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = -\left[\int_0^t f(t)\right] \frac{1}{-s}\Bigg|_{t=0} - \int_0^\infty f(t)\frac{e^{-st}}{-s}\,dt$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s} f^{-1}(0) + \frac{1}{s}\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Maka :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)\right] = \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}f^{-1}(0)$$

Contoh Soal :

a. $Tentukan\ transformasi\ laplace\ dari\ f(t) = t - 3e^{-2t}$

$solusi$

$$\mathcal{L}[t - 3e^{-2t}] = \mathcal{L}[t] - 3\mathcal{L}[e^{-2t}]$$

$$= \frac{1}{s^2} - 3\left(\frac{1}{s+2}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s+2}$$

$$= \frac{s + 2 - 3s^2}{s^2(s+2)}$$

$$= \frac{-3s^2 + s + 2}{s^2(s+2)}$$

b. *Tentukan transformasi laplace dari* $f(t) = 2t^2$

$$\mathcal{L}[2t^2] = 2\mathcal{L}[t^2]$$
$$= 2\left(\frac{2!}{s^{(2+1)}}\right)$$
$$= \frac{4}{s^3}$$

c. *Dengan menggunakan sifat transformasi laplace*
Tentukan transformasi laplace dari $f(t) = e^{-2t}\sin(3t)$
gunakan sifat $\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha)$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin(3t)], \qquad dimana\ f(t) = \sin(3t)$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\sin(3t)] = \frac{3}{s+9}$$

$$F(s) = \frac{3}{s^2+9}$$

$$\mathcal{L}[e^{-2t}\sin(3t)] = F(s+2) = \frac{3}{(s+2)^2+9}$$

$$= \frac{3}{s^2+4s+13}$$

d. Jika diketahui

$$\mathcal{L}[e^{-2t}] = \frac{1}{s+2}$$

Dengan menggunakan sifat diferensial

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] = sF(s) - f(0)$$

Tentukan transformasi laplace dari $2e^{-2t}$

Solusi:

$$\frac{d}{dt}(e^{-2t}) = -2e^{-2t}$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{-2t})\right] = \mathcal{L}[-2e^{-2t}]$$

$$\mathcal{L}[2e^{-2t}] = -\mathcal{L}[-2e^{-2t}] = -\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(e^{-2t})\right]$$

$$= -[s(\mathcal{L}[e^{-2t}]) - f(0)] \qquad dimana\ f(t) = e^{-2t}$$

$$= -\left[s\left(\frac{1}{s+2}\right) - e^{-2(0)}\right]$$

$$= -\left[s\left(\frac{1}{s+2}\right) - 1\right] = -\left[\frac{s}{s+2} - \frac{s+2}{s+2}\right] = -\left[\frac{-2}{s+2}\right] = \frac{2}{s+2}$$

Inverse Transformasi Laplace

$$X(s) = L\{x(t)\} = \int_0^\infty x(t)e^{-st}\,dt$$

Transformasi Laplace $X(s)$ dari fungsi $x(t)$

$$x(t) = L^{-1}\{X(s)\}$$

Inverse Transformasi Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Fungsi x(t) haruslah **real dan kontinyu** sepanjang interval waktu yang akan dievaluasi, jika tidak transformasi Laplace tidak dapat digunakan.

Inverse Transformasi Laplace

- Selesaikan **invers transformasi Laplace** berikut $L^{-1}\left\{\frac{2s+4}{s^2(s^2+4)}\right\}$

$$\frac{2s+4}{s^2(s^2+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{Cs+D}{s^2+4}$$

$$2s + 4 = As(s^2 + 4) + B(s^2 + 4) + (Cs + D)(s^2)$$

$$2s + 4 = As^3 + 4As + Bs^2 + 4B + Cs^3 + Ds^2$$

$$2s + 4 = (A+C)s^3 + (B + D)s^2 + 4As + 4B$$

Dengan menggunakan perbandingan maka kita peroleh

$$2s = 4As$$

$$\frac{1}{2} = A$$

$$4 = 4B$$

$$\frac{1}{2} + C = 0$$

$$C = -\frac{1}{2}$$

$$B + D = 0$$

$$1 + D = 0$$

$$D = -1$$

Subtitusikan ke dalam persamaan

$$\frac{1}{2s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-s-1}{2(s^2+4)}$$

$$\frac{1}{2s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-s}{2(s^2+4)} + \frac{-1}{2(s^2+4)}$$

Contoh Soal:

Selesaikan invers transformasi Laplace berikut

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{2s}+\frac{1}{s^2}+\frac{-s}{2(s^2+4)}+\frac{-1}{2(s^2+4)}\right\}$$

Berdasarkan sifat invers transformasi laplace. Untuk fungsi $f(s), g(s)$ *dan konstanta* a, b: $a \cdot L^{-1}\{f(s)\} + b \cdot \{g(s)\}$

$$= \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{2} L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

Berdasarkan tabel transformasi lapalce invers

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\} = \cos 2t$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\sin 2t$$

Sehingga,

$$= \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\sin 2t$$

$$= \frac{1}{2} + t - \frac{1}{2}\cos 2t - \frac{1}{4}\sin 2t$$

Prosedur Solusi pers. Differensial : Transformasi Laplace

1. Transformasi persamaan differensial ke dalam domain s dengan transformasi Laplace menggunakan tabel transformasi Laplace.
2. Manipulasi persamaan aljabar yang telah ditransformasikan untuk mendapatkan variabel outputnya.
3. Lakukan ekspansi pecahan parsial terhadap persamaan aljabar pada langkah 2.
4. Lakukan invers transformasi Laplace dengan tabel transformasi Laplace untuk mendapatkan solusi dalam domain t.

Prosedur Solusi pers. Differensial : Transformasi Laplace

- Transformasi Laplace adalah rasional, yaitu terdapat perbandingan polinomial pada variabel kompleks s, sehingga

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{Pembilang}{Penyebut} = \frac{Numerator}{Denumerator} = \frac{Zero}{Pole}$$

- X(s) akan rasional bila x(t) adalah kombinasi linear dari eksponensial real atau kompleks
- Untuk transformasi laplace rasional, akar-akar dari polinomial pembilang biasanya dianggap zero dari X(s), karena untuk nilai-nilai dari s, X(s)=0.
- *Lokasi akar polinomial pembilang* ditandai dengan “ o “
- Akar-akar dari polinomial penyebut dianggap sebagai pole (kutub) dari X(s), untuk nilai-nilai dari s, X(s) adalah tak hingga (infinite).
- *Lokasi akar polinomial penyebut* ditandai dengan “ x “

Ekspansi Pecahan Parsial: Review

- Transformasi Laplace dari suatu persamaan differensial f(t) lazimnya diberikan dalam bentuk:

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

N(s) adalah numerator (pembilang) dalam s, D(s) denumerator (penyebut) dalam s

- Bentuk ekspansi pecahan parsial dari F(s) bergantung pada akar-akar *persamaan karakteristik*nya (denumerator).
  - ***Kasus 1: Persamaan karakteristik hanya memiliki akar real dan tidak sama***

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_N)}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+s_1)} + \frac{K_2}{(s+s_2)} + \ldots + \frac{K_N}{(s+s_N)}$$

K_i (i=1,…,N) adalah konstanta yang harus dicari

Prosedur Solusi pers. Differensial : Transformasi Laplace

Konstanta K dicari dengan persamaan berikut:

$$K_i = [(s+s_i)F(s)]_{s=-s_i} = \frac{N(-s_i)}{(-s_i+s_1)(-s_i+s_2)\ldots(-s_i+s_{i-1})(-s_i+s_{i+1})\ldots(-s_i+s_N)}$$

- ***Kasus 2: Persamaan karakteristik hanya memiliki akar kompleks***

Jika persamaan karakteristik hanya memiliki M pasangan complex-conjugate, F(s) dapat dituliskan sbb:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2\ldots(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s) = \frac{A_1 s+B_1}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1} + \frac{A_2 s+B_2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2} + \ldots + \frac{A_M s+B_M}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dimana Ai dan Bi konstanta yang dicari dengan menyamakan pangkat dalam s

Prosedur Solusi pers. Differensial : Transformasi Laplace

- ***Kasus 3: Persamaan karakteristik memiliki akar real, tidak sama dan kompleks***

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+s_1)(s+s_2)\ldots(s+s_N)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2\ldots(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Dalam kasus tersebut pecahan parsialnya dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(s) = \frac{K_1}{(s+s_1)} + \frac{K_2}{(s+s_2)} + \ldots + \frac{K_N}{(s+s_N)} +$$

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_1} + \frac{A_2 s + B_2}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_2} + \ldots + \frac{A_M s + B_M}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)_M}$$

Solusi Persamaan Differensial menggunakan Transformasi Laplace

Diberikan persamaan differensial sbb:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 5f(t)$$

Dimana f(t) adalah fungsi unit step dengan kondisi awal **y(0)=-1 dan y´(0)=2.** Transformasi Laplace menghasilkan:

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 3sY(s) - 3y(0) + 2Y(s) = 5\frac{1}{s}$$

Fungsi unit step dari tabel transformasi Laplace

$$s^2Y(s) + s - 2 + 3sY(s) + 3 + 2Y(s) = \frac{5}{s}$$

$$s(s^2 + 3s + 2)Y(s) = -s^2 - s + 5$$

Menggunakan teorema differensiasi transformasi Laplace

$$\boxed{Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)}}$$

Solusi dalam domain t diperoleh dengan invers transformasi Laplace

Invers transformasi Laplace dilakukan dengan memanipulasi penyebut (denumerator) dalam fungsi Y(s) kedalam akar-akarnya:

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s^2 + 3s + 2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

Ekpansi dalam pecahan parsial,

$$Y(s) = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s+1)} + \frac{C}{(s+2)} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)(s+2)}$$

Dimana A, B dan C adalah koefisien

$$A = [sY(s)]_{s=0} = \frac{-s^2 - s + 5}{(s+1)(s+2)} = \frac{5}{2}$$

$$B = [(s+1)Y(s)]_{s=-1} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+2)} = -5$$

$$C = [(s+2)Y(s)]_{s=-2} = \frac{-s^2 - s + 5}{s(s+1)} = \frac{3}{2}$$

Persamaan Y(s) dalam bentuk pecahan parsial menjadi

$$\boxed{Y(s) = \frac{5}{2s} - \frac{5}{(s+1)} + \frac{3}{2(s+2)}}$$

Dalam domain frekuensi yaitu s

Dengan **invers transformasi Laplace** (didapat dari tabel), persamaan dalam domain waktu y(t) menjadi

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Dalam domain waktu

Dengan $t \geq 0$

Contoh Soal:

Diberikan persamaan differensial, selesaikan untuk semua nilai awal y(t) adalah nol menggunakan pers laplace sbb: $$\frac{d^2y}{dt^2} + 12\frac{dy}{dt} + 32y = 32u(t)$$

Solusi:

$$s^2Y(s) + 12sY(s) + 32Y(s) = \frac{32}{s}$$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s^2+12s+32)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

$$Y(s) = \frac{32}{s(s+4)(s+8)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+4)} + \frac{K_3}{(s+8)}$$

$$K_1 = \frac{32}{(s+4)(s+8)}\Big|_{s\to 0} = 1$$

$$K_2 = \frac{32}{s(s+8)}\Big|_{s\to -4} = -2$$

$$K_3 = \frac{32}{s(s+4)}\Big|_{s\to -8} = 1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(s+4)} + \frac{1}{(s+8)}$$

$$y(t) = (1 - 2e^{-4t} + e^{-8t})u(t)$$

Soal soal Latihan

- BUKTIKAN BAHWA:

1. $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+19}{s^2+6s+34}\right\} = 3e^{-3t}\cos 5t + 2e^{-3t}\sin 5t$$

2. $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}\right\} = -\frac{1}{8} + \frac{5}{12}e^{-2t} + \frac{17}{24}e^{4t}$$

3. $$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s^2+4)(s-1)}\right\} = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t.$$

4. $$\mathcal{L}\{t^2 \sin kt\} = \frac{6ks^2-2k^3}{(s^2+k^2)^3}.$$

5. Tentukan $\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$. Mula-mula diperiksa $\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t}$ ada dan bernilai 1, sehingga sifat di atas dapat digunakan.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2-1} = -\frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}.$$

LATIHAN