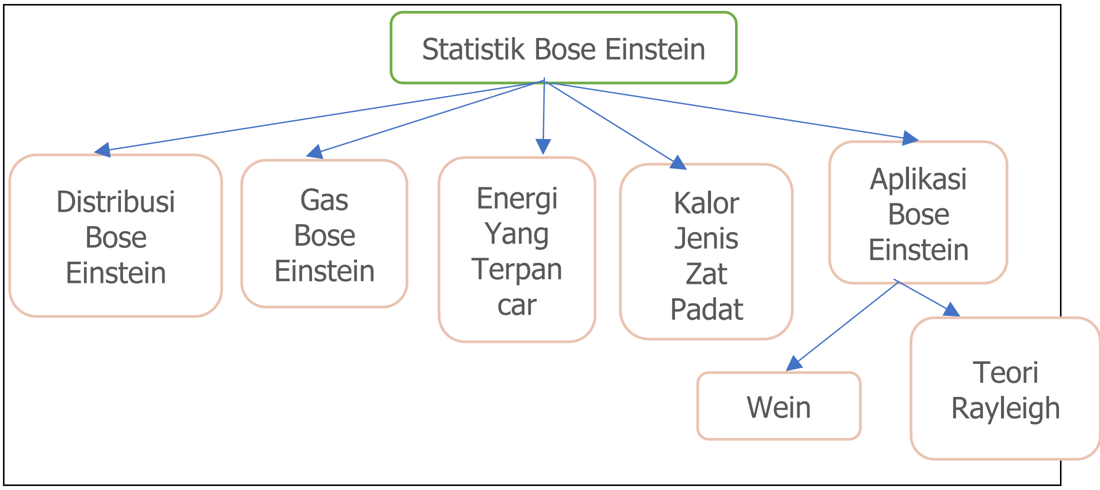
UNIT – IV
STATISTIK BOSE EINSTEIN

Metode Pembelajaran	: Case Method
Waktu	: 150 Menit
Sub CPMK	: Mahasiswa mampu Memahami Bagaimana Proses Membangun statistik Bose Einstein serta Menentukan Parameter statistik Bose Einstein

A. Pendahuluan

Unit ini akan membahas Bagaimana Proses Membangun statistik Bose Einstein serta Menentukan Parameter statistik Bose Einstein

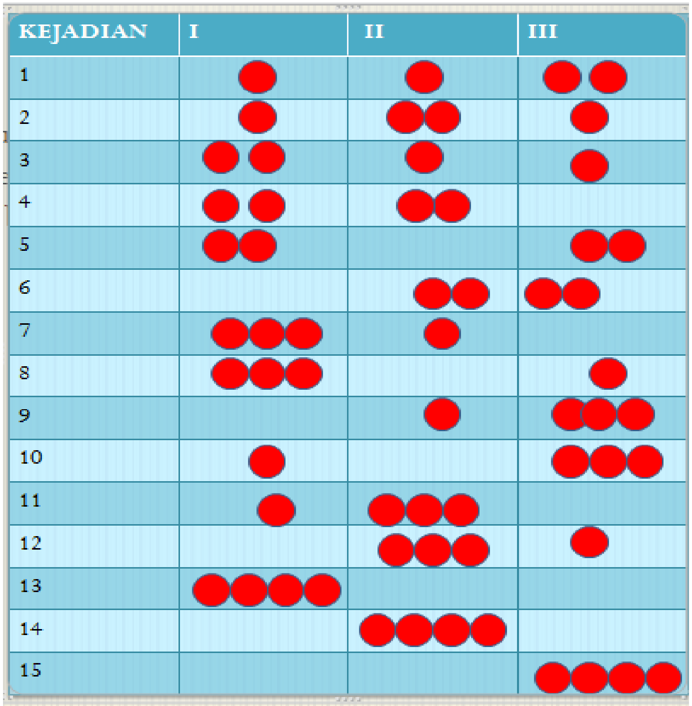


B. Materi

"Hanya kepada Allah lah tunduk/patuh segala apa yang ada di langit dan di bumi baik atas kesadarannya sendiri ataupun karena terpaksa, (dan sujud pula) bayang-bayangnya diwaktu pagi dan petang" (ar Raad :15) Dalam ayat ini Allah SWT mengingatkan kita bahwa apapun nama dan bentuk gejala yang ditunjukan-Nya selalu mengikuti suatu sistem dengan hukum-hukum yang telah ditetapkanNya.

1. Distribusi Bose Einstein

Distribusi energi dengan peluang terbesar dari sebuah sistem boson yang identik tidak saling berinteraksi, bisa diperoleh dengan cara sebagai berikut berikut: Misalkan ada 3 buah keadaan dan 4 buah boson



Gambar 4 Sistem Boson

Secara matematis dapat ditulis

$$W_s = \frac{[(g_s-1)+n_s]!}{(g_s-1)!\,n_s!}$$

Jika sistem mempunyai tingkat energi lebih dari 1 maka banyaknya cara penyusunan yang paling mungkin adalah

$$W = \prod_s w_s$$

$$W = \prod_s \frac{[(g_s-1)+n_s]!}{(g_s-1)!\,n_s!}$$

1.1. Konfigurasi Yang Paling Mungkin

Sama halnya dengan statistik Maxwell-Boltzman, konfigurasi yang paling mungkin dapat ditentukan dengan nilai ns yang memberikan nilai maksimum untuk bobot W.

$$\sum_s \left(\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s \right) dn_s = 0$$

Karena maksimum, maka suku dalam kurung bernilai nol.

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

Dengan menggunakan formula Stirling didapatkan

$$\log w = \sum_s \log w_s$$

$$= \sum_s \left[(g_s - 1 + n_s) \log (g_s - 1 + n_s) - (g_s - 1) \log (g_s - 1) - n_s \log n_s \right]$$

Untuk log w maksimum, maka

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log (g_s - 1 + n_s) - \log n_s$$

Karena gs dan ns lebih besar, maka

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right)$$

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

$$\frac{\partial \log w}{\partial n_s} = \log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right)$$

$$\log \left(\frac{g_s + n_s}{n_s} \right) + a + \beta \varepsilon_s = 0$$

$$\frac{g_s}{n_s} + 1 = e^{-(\alpha + \beta \varepsilon_s)}$$

$$\boxed{\frac{g_s}{n_s} = e^{-(x + \beta \varepsilon_s)} - 1}$$ atau $$n_s = \frac{g_s}{e^{-(x + \beta \varepsilon_s)} - 1}$$

1.2. Distribusi m Partikel

Andaikan kita mau mendistribusikan m_i partikel ke dalam g_i keadaan. Persoalan ini adalah persoalan kombinasi mengatur m_i partikel identik dan g_i-1 pembatas identik dalam satu garis lurus

$$\Omega = \prod_i \frac{(m_i + g_i - 1)!}{m_i!(g_i - 1)!}$$

$$\ln \Omega = \sum_i \left[\ln(m_i + g_i - 1)! - \ln m_i! - \ln(g_i - 1)! \right]$$

Gunakan pendekatan Stirling

$$\ln x! = x \ln x - x$$

Maka

$$\ln \Omega \approx \sum_i \begin{bmatrix} (m_i + g_i - 1)\ln(m_i + g_i - 1) \\ -(m_i + g_i - 1) - m_i \ln m_i + m_i \\ -(g_i - 1)\ln(g_i - 1) + (g_i - 1) \end{bmatrix}$$

Karena m_i >> 1 dan g_i>> 1 maka persamaan diatas dapat menjadi :

$$\ln \Omega \approx \sum_i \begin{bmatrix} (m_i + g_i)\ln(m_i + g_i) \\ - m_i \ln m_i - (g_i)\ln(g_i) \end{bmatrix}$$

Agar ln Ω maksimum, haruslah d(ln Ω) = 0

$$d(\ln \Omega) = \sum_i dm_i \ln(m_i + g_i) + dm_i - dm_i \ln m_i - dm_i = 0$$

Maka

$$\sum_i \left(\ln \frac{m_i + g_i}{m_i} \right) dm_i = 0$$

Tambahkan factor berikut

$$\alpha \sum_i dm_i = 0 \quad \text{dan} \quad -\beta \sum_i \varepsilon_i dm_i = 0$$

Karena N adalah suatu konstanta, maka diferensialnya nol, dN=0

$$\sum_i dn_i = 0$$

Juga harus memenuhi hukum kekekalan energi

$$\sum_i \varepsilon_i m_i = E$$

Karena E harus tetap, maka diferensialnya nol, $dE = 0$

$$\sum_i \varepsilon_i dm_i = dE = 0$$

Untuk memaksimumkan ln Ω, diferensial berikut haruslah nol:

$$\sum_i \left(\ln\left(\frac{m_i + g_i}{m_i} \right) + \alpha - \beta\varepsilon_i \right) dm_i = 0$$

Dengan demikian

$$\ln\left(\frac{m_i + g_i}{m_i} \right) = -\alpha + \beta\varepsilon_i$$

Maka $\dfrac{m_i + g_i}{m_i} = e^{-\alpha} e^{\beta\varepsilon_i}$ atau $m_i = \dfrac{g_i}{e^{-\alpha} e^{\beta\varepsilon_i} - 1}$

Jika n_j adalah rata-rata banyaknya partikel di dalam setiap sel degenerasi, maka

$$m_j = n_j g_j$$

sehingga diperoleh

$$n_i = \frac{1}{e^{-\alpha} e^{\beta\varepsilon_i} - 1}$$

Partikel yang memenuhi aturan statistik ini disebut Boson, contoh : foton

2. Gas Bose Einstein

Jika molekul dalam gas biasa memiliki momentum sudut h/2π, maka pasti boson dan akan memenuhi distribusi Bose-Einstein. Karena masing-masing keadaan diperbolehkan mengisi h3 volume dari ruang fasa bobot tiap lembaran , keadaan yang mungkin ditempati d volume dari ruang fasa, adalah

$$g = \frac{d\Gamma}{h^3}$$

$$g(E)dE = \frac{d\Gamma}{h^3}$$

dim *ana*

$$d\Gamma = 2\pi V(2m)^{3/2} E^{1/2} dE$$

sehingga

$$g(E)dE = \frac{2\pi V(2m)^{3/2} E^{1/2} dE}{h^3}$$

Banyaknya molekul yang mempunyai energy pada rentang ε sampai $\varepsilon + d\varepsilon$ adalah

$$n(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{h^3} \frac{2\pi(2m)^{3/2} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon . V}{\frac{1}{A} e^{\varepsilon/kT} - 1}$$

Nilai parameter A dapat dicari dari kondisi

$$\int_0^\infty n(\varepsilon)d\varepsilon = N$$

$$A = \frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}}$$

$$\alpha = \log A = \log\left[\frac{Nh^3}{V(2\pi mkT)^{3/2}}\right]$$

2.1. Radiasi Benda Hitam

Foton memilki momentum sudut yang tidak terpisahkan dalam satuan h/2π. Maka secara alami akan berperilaku sebagai Boson dan memenuhi distribusi Bose-einstein. Terdapat dua poin penting mengenai radiasi ini.

a. Karena foton mungkin dapat diserap dinding dan dipancarkan oleh dinding, maka atau $\sum_s dn_s = 0$ tidak berlaku sehingga α = 0, sehingga A= e^α = 1.

b. Energi dari foton adalah hv dimana v adalah frekuensi radiasi, disebutkan bahwa jumlah mode getaran dalam rentang panjang gelombang λ sampai λ+ d λ adalah (4π/ λ^4) d λ per satuan volume.

Pada gas foton terdapat 2 arah polarisasi pada gelombang elektromagnet, arahnya tegak lurus terhadap arah rambat gelombang.

Oleh karena itu, jumlah yang diizinkan pada keadaan dalam rentang λ sampai λ+ d λ adalah

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

g(λ) adalah kerapatan dari keadaan. Dengan Distribusi Bose-Einstein

$$n_s = \frac{g_s}{e^{hv/kT} - 1}$$

$$g(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda$$

$$n(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda.\frac{1}{e^{hc/k\lambda T} - 1}$$

Energi radiasi per satuan volume per satuan panjang gelombang disebut **Hukum Radiasi Menurut Planck**

$$E(\lambda) = n_\lambda(\lambda)hv$$
$$E(\lambda) = n_\lambda(\lambda)(hc/\lambda)$$
$$E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hcd\lambda}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT} - 1\right)}$$

Untuk panjang gelombang yang Panjang disebut dengan Persamaan **Radiasi Dari Rayleigh Jeans**

$$e^{hc/kT} \cong 1 + hc/k\lambda T$$
$$maka.$$
$$E(\lambda)d\lambda \cong \frac{8\pi kTd\lambda}{\lambda^4}$$

Untuk panjang gelombang pendek disebut juga **Hukum Pergeseran Wien**

$$e^{hc/k\lambda T} >> 1$$
$$maka,$$
$$E(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hcd\lambda}{\lambda^5}\left(e^{-hc/\lambda kT}\right)d\lambda$$

3. Energi yang terpancar tiap satuan luas tiap satuan waktu

Jumlah foton yang terpancar pada rentang λ sampai λ+dλ
Per satuan luas dari lubang per satuan waktu adalah

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = n(\lambda)d\lambda\frac{c}{4}$$

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda.\frac{1}{e^{hc/k\lambda T}-1}\frac{c}{4}$$

$$n_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi c d\lambda}{\lambda^4\left(e^{hc/k\lambda T}-1\right)}$$

Energi yang terpancar persatuan luas per satuan waktu

$$E_{rad}(\lambda)d\lambda = \frac{2\pi hc^2 d\lambda}{\lambda^5\left(e^{hc/k\lambda T}-1\right)}$$

Energi total yang terpancar per satuan volume
Pada temperature tetap adalah dengan cara mengintegralkan
Pers 4.21

$$E = \int_0^\infty E(\lambda)d\lambda$$

$$E = \int_0^\infty \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}$$ dengan mensubtitusi t= hc/kT

$$E = \frac{8\pi h}{c^3}\left\{\frac{kT}{h}\right\}^4\int_0^\infty \frac{t^3 dt}{e^t-1}$$

$$E = \frac{8\pi^5 k^4}{15h^3c^3}T^4$$

4. Kalor jenis zat Padat

Energi dari radiasi elektromagnetik terkuantisasi dalam bentuk foton sehingga energi gelombang elastis atau gelombang suara, dalam medium padat dapat dianggap dikuantisasi dalam bentuk fonon. Energi fonon dengan frekuensi f adalah hf dan karena fonon memiliki momentum sudut maka dapat dianggap sebagai gas Boson.

$$n(v)dv = \frac{g(v)dv}{\left(e^{hc/\lambda kT}-1\right)}$$

Agar persamaan n(v) dv menjadi sederhana, maka diperlukan aproksimasi untuk g(v) dv semacam pendekatan Debye

$$g(v)dv = Cv^2 dv \qquad \text{untuk } v \le v_m$$
$$g(v)dv = 0, \qquad \text{untuk } v > v_m$$

Dimana C adalah konstant yang bergantung pada kecepatan gelombang transversal dan lungitudional. Frekuensi maksimum ditentukan berdasarkan fakta bahwa hanya ada 3 mode getaran.

$$3N = \int_0^{\infty} g(v)dv = \int_0^{v_m} Cv^2 dv$$
$$3N = \frac{1}{3} C v_m^3$$
$$C = \frac{9N}{v_m^3}$$

5. Aplikasi Bose Einstin

Partikel identik tak dapat dibedakan dengan spin 0 dan kelipatan bilangan genap. Fungsi distribusi statistik Bose-Einsten

$$f(E) = \frac{1}{e^{E/kT} - 1};$$

Banyaknya partikel pada rentang energi E dan E+dE :

$$n(E)dE = g(E)f(E)dE$$
$$U(E)dE = g(E)f(E)EdE$$

5.1. Teori Rayleigh dan Jeans

- Menghitung kerapatan gelombang berdiri didalam rongga benda hitam pada rentang frekuensi *w* and *w + dw*.
- Rongga radiasi benda hitam berbentuk kotak.
- Persyaratan mengharuskan gelombang pada ketiga dinding kotak adalah nol.

$$Banyaknya \quad keadaan \quad foton\, pada \quad volume \quad V$$

$$g(\nu)d\nu = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$$

$$g(k)dk = \frac{V}{\pi^2}k^2 dk$$

$$g(\omega)d\omega = \frac{8V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

- Energi foton di dalam volume BBR berdasarkan teorema ekuipartisi energi

$$U(\omega)d\omega = \bar{\varepsilon}g(\omega)d\omega = \frac{\bar{\varepsilon}V}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

- Rapat energi foton

$$\frac{U(\omega)d\omega}{V} = u(\omega)d\omega = \frac{kT}{\pi^2 c^3}\omega^2 d\omega$$

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi kT}{c^3}\nu^2 d\nu$$

5.2. Rapat Energi Wein

$$u(\nu)d\nu = c_1 \nu^3 e^{-c_2\nu/T} d\nu$$

Hukum pergeseran Wien menyatakan bahwa pancaran spektrum radiasi benda hitam per unit panjang gelombang ,mempunyai puncak pada panjang gelombang λ_{max} yang besarnya berbanding terbalik dengan temperatur benda

$$\lambda_{max}T = \frac{hc}{4.96k} = 2.90 \times 10^{-3}\ m \cdot K$$

LATIHAN SOAL

Kerjakan Soal Dengan Teliti !

1. Tentukan ln W untuk statistik Bose-Einstein
2. Hitunglah energi rata-rata sistem bila energi tingkat energi j adalah π_j dan ditempati oleh Nj partikel.