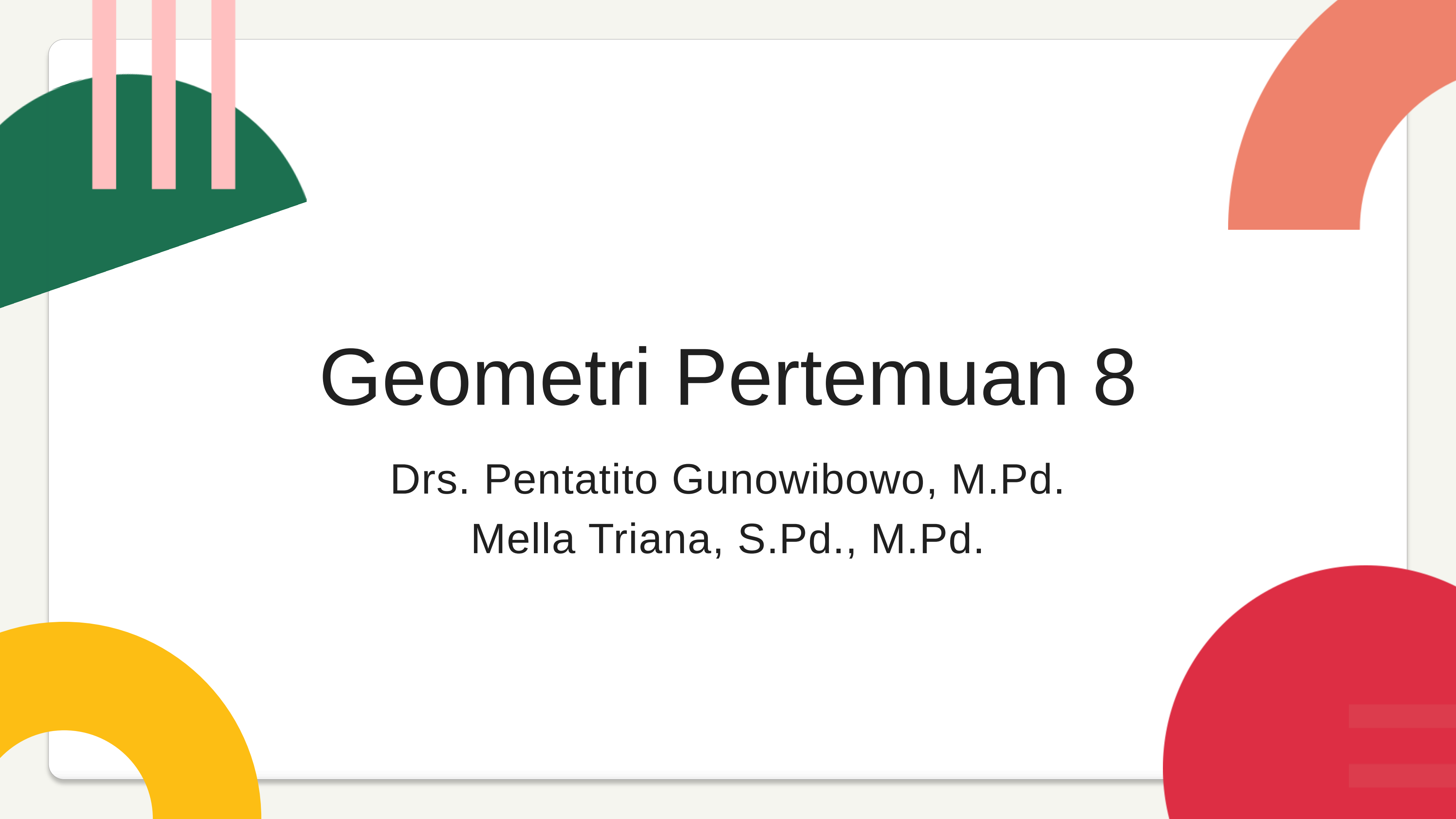




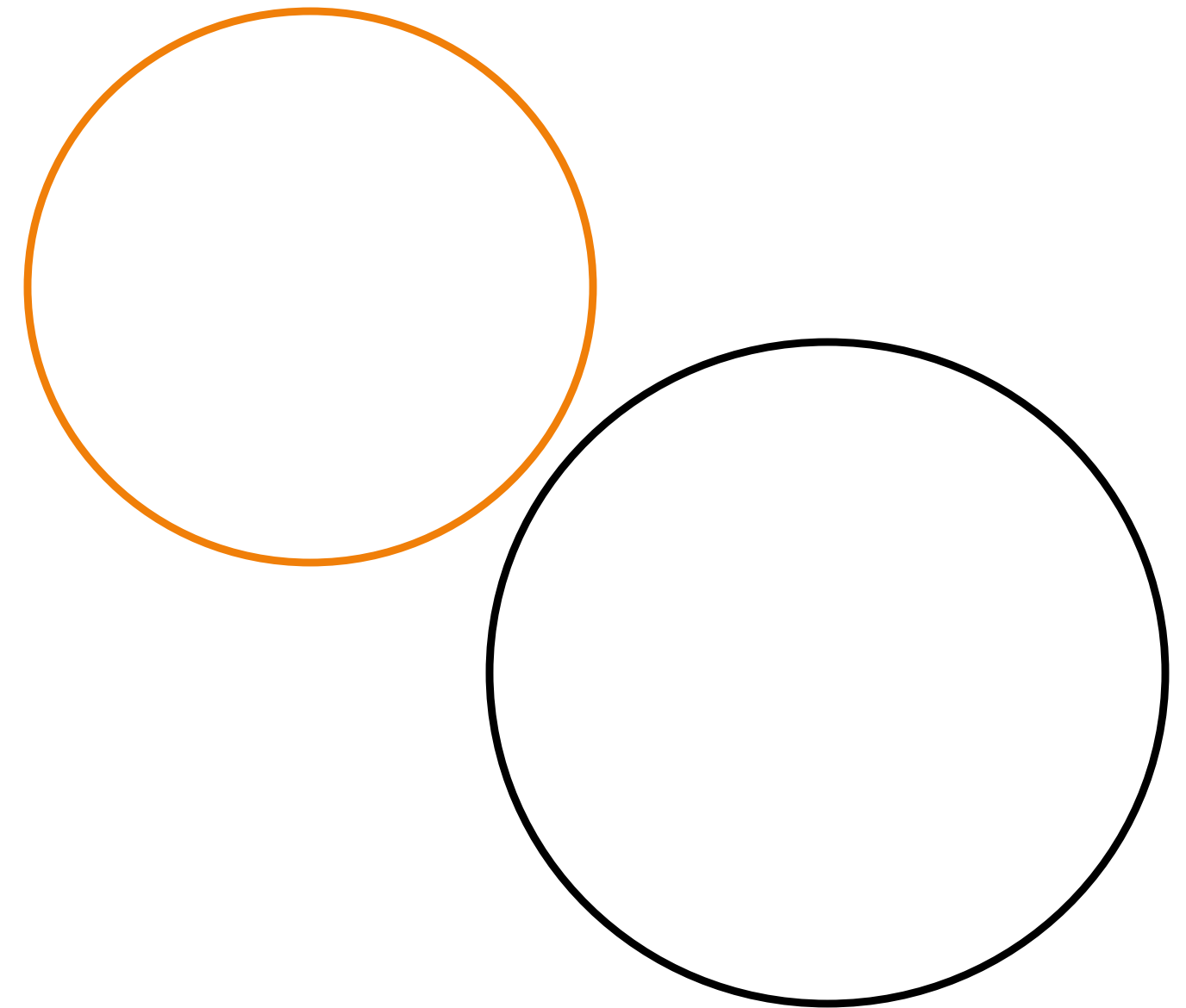
Geometri Pertemuan 8

Drs. Pentatito Gunowibowo, M.Pd.
Mella Triana, S.Pd., M.Pd.

Lingkaran

Capaian Pembelajaran

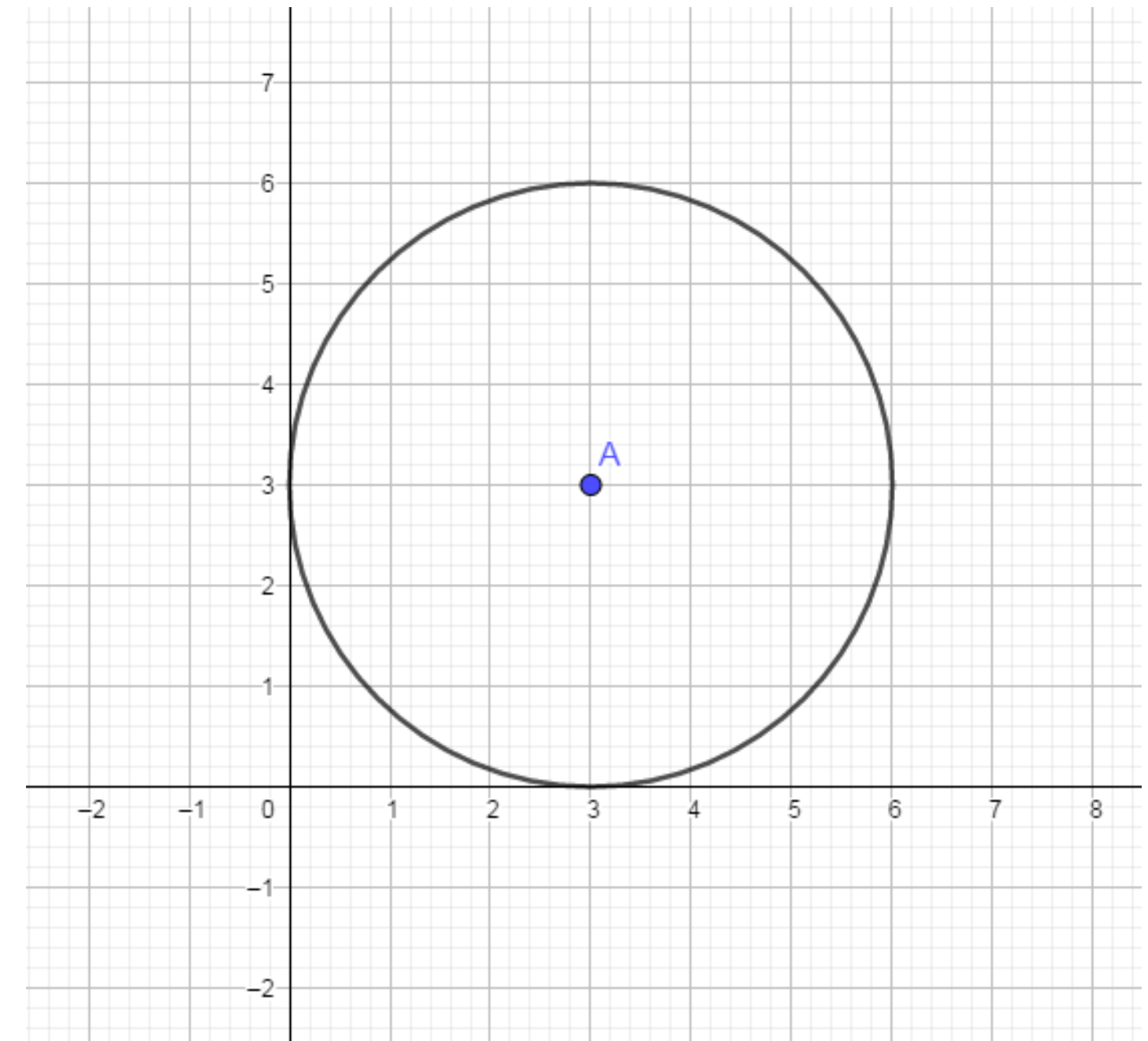
Mahasiswa memahami aksioma, definisi, teorema, serta dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan lingkaran



Definisi Lingkaran

Lingkaran adalah semua titik yang terletak pada satu bidang dan semua titik tersebut berjarak tertentu dan sama dari sebuah titik tertentu.

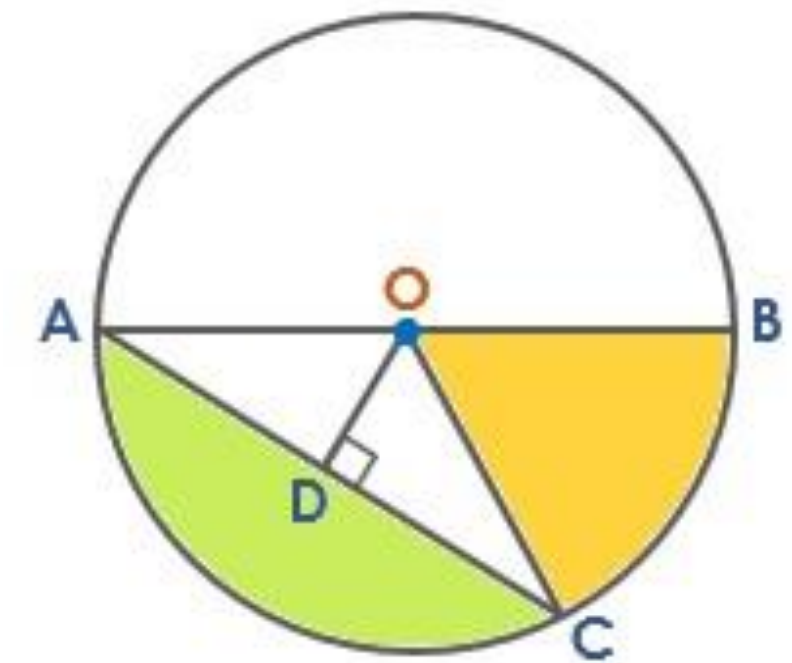
Titik tertentu itu disebut ***titik pusat*** lingkaran dan jarak yang tertentu tersebut disebut *panjang jari-jari atau jejari atau radius* lingkaran.



Unsur-Unsur Lingkaran

Pentatito G & Mella T

- Jari-jari** : ruas garis yang menghubungkan pusat dan sembarang titik pada lingkaran.
- Busur** : sebagian dari lingkaran
- Tali busur** : garis yang menghubungkan dua titik sembarang pada lingkaran.
- Diameter** : tali busur yang melalui pusat lingkaran, diameter merupakan tali busur terpanjang dan panjangnya dua kali jari-jari.
- Apotema** : garis yang ditarik dari pusat lingkaran tegak lurus tali busur lingkaran.
- Juring atau sektor** : daerah yang dibatasi oleh dua jari-jari dan busur suatu lingkaran.
- Garis singgung lingkaran**: garis yang memotong lingkaran tepat di satu titik.
- Keliling lingkaran** : panjang busur pembentuk lingkaran.
- Luas lingkaran** : luas daerah datar yang dibatasi lingkaran.
- Tembereng** : Daerah yang dibatasi oleh tali busur dan busur pada suatu lingkaran.



-  = Juring
-  = Tembereng
- OA, OB, OC = Jari-jari
- Titik O = Pusat lingkaran
- AB = Diameter
- $\widehat{AC}$ = Busur
- AC atau garis ADC = Tali busur
- OD = Apotema

Sumber gambar :
<http://www.jendelailmu.net/2016/03/pengertian-dan-unsur-unsur-lingkaran.html>

Teorema 5.1

Garis singgung suatu lingkaran terletak tegak lurus pada jari-jari ke titik singgungnya

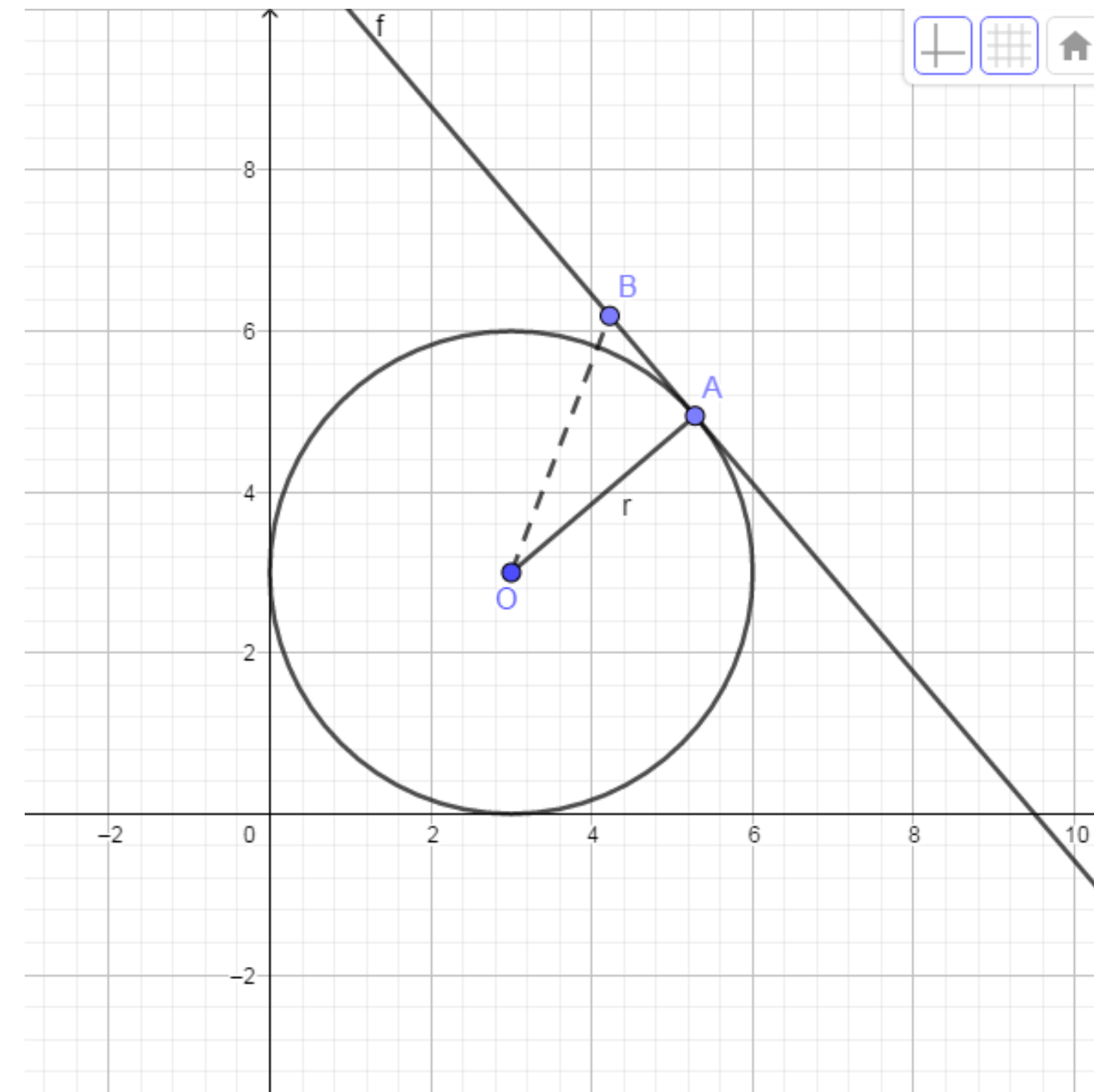
Diketahui: garis f menyinggung lingkaran di A

Akan dibuktikan: f tegak lurus jari-jari OA

Bukti:

Andaikan f **tidak** tegak lurus pada OA , maka pada f dapat ditentukan titik B , sehingga $OA = OB = r$ dan OB tegak lurus f , ini berarti titik B terletak pada lingkaran.

Jadi f mempunyai titik A dan B bersekutu dengan lingkaran. Hal ini bertentangan dengan yang diketahui, ini berarti pengandaian salah. Oleh karena itu, terbukti bahwa f tegak lurus jari-jari OA

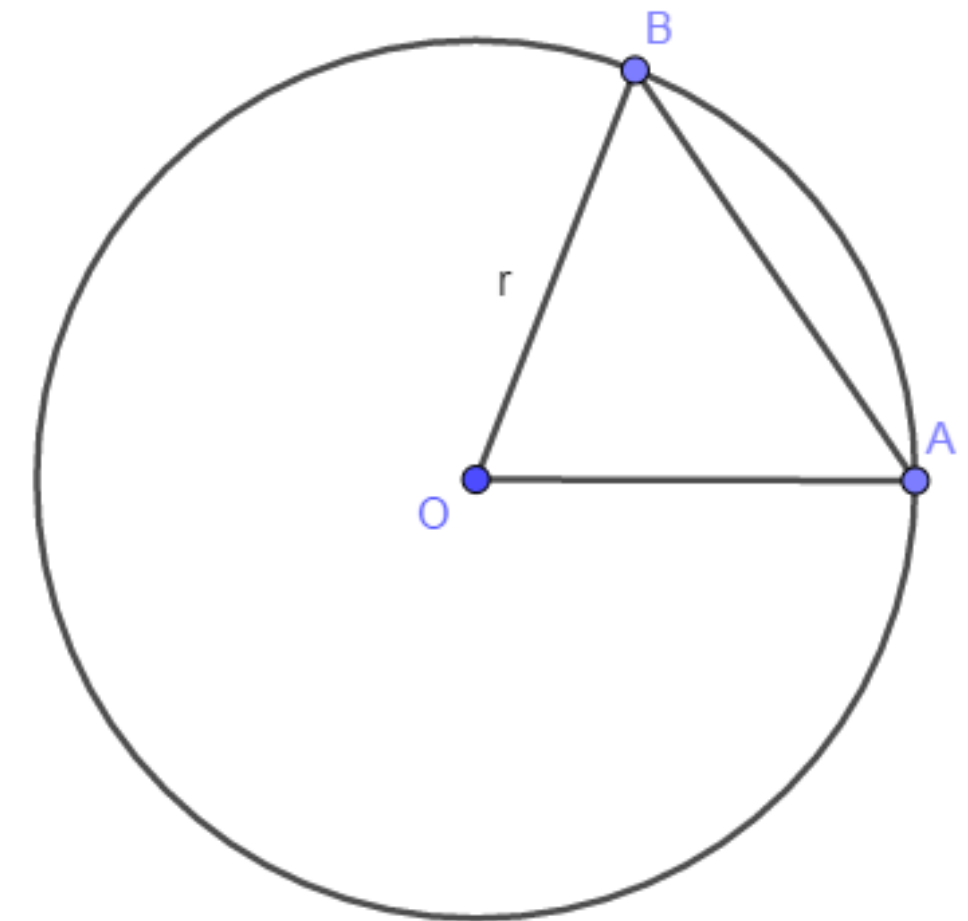


Sudut Pusat

Definisi

Sudut pusat sebuah lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya berimpit dengan pusat lingkaran.

Dalam lingkaran yang berpusat di O , $\angle AOB$ disebut sudut pusat lingkaran, segmen garis AB disebut tali busur lingkaran, dan bagian lingkaran dari titik A ke titik B disebut busur AB sering ditulis $\widehat{AB}$. Juga sering disebut $\angle AOB$ terletak pada $\widehat{AB}$ atau menghadap busur AB .



Teorema 5.2

Dalam suatu lingkaran, menghadap sudut-sudut pusat yang sama terletak tali busur dan busur yang sama.

Diketahui: A, B, C, dan D titik-titik pada lingkaran dan $\angle AOB = \angle COD = \alpha$

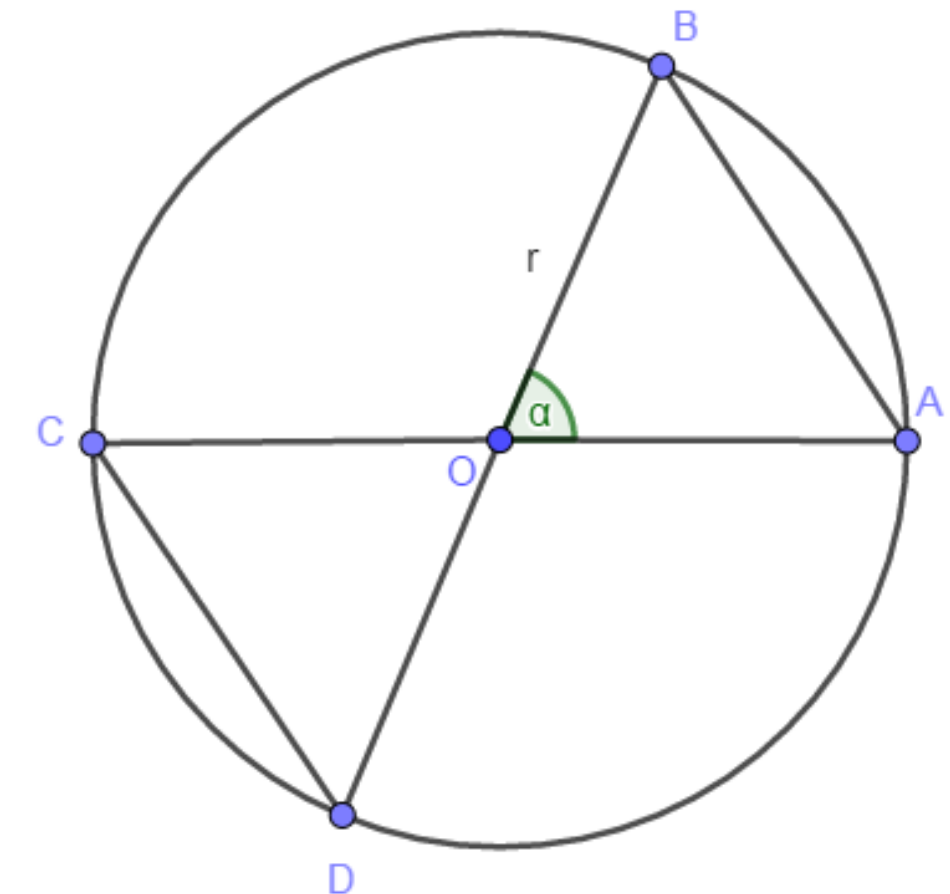
Akan dibuktikan:

$AB = CD$ dan $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

Bukti:

$\triangle AOB \cong \triangle COD$ sebab diketahui A, B, C, dan D titik-titik pada lingkaran maka $OA = OB = OC = OD = r$ dan $\angle AOB = \angle COD = \alpha$ (s, sd, s) sehingga $AB = CD$.

Jadi kedua segitiga tersebut dapat kita himpitkan sedemikian hingga titik C berhimpit dengan titik A dan titik D berhimpit dengan titik B. Jika kita ambil sembarang titik E pada $\widehat{CD}$, maka titik tersebut akan berimpit dengan titik F sedemikian hingga $OE = OF = r$. Jadi titik F terletak pada $\widehat{AB}$. Karena titik E adalah sembarang titik pada $\widehat{CD}$, maka setiap titik pada $\widehat{CD}$ berimpit dengan titik pada $\widehat{AB}$. Akibatnya $\widehat{AB} = \widehat{CD}$



Teorema 5.3

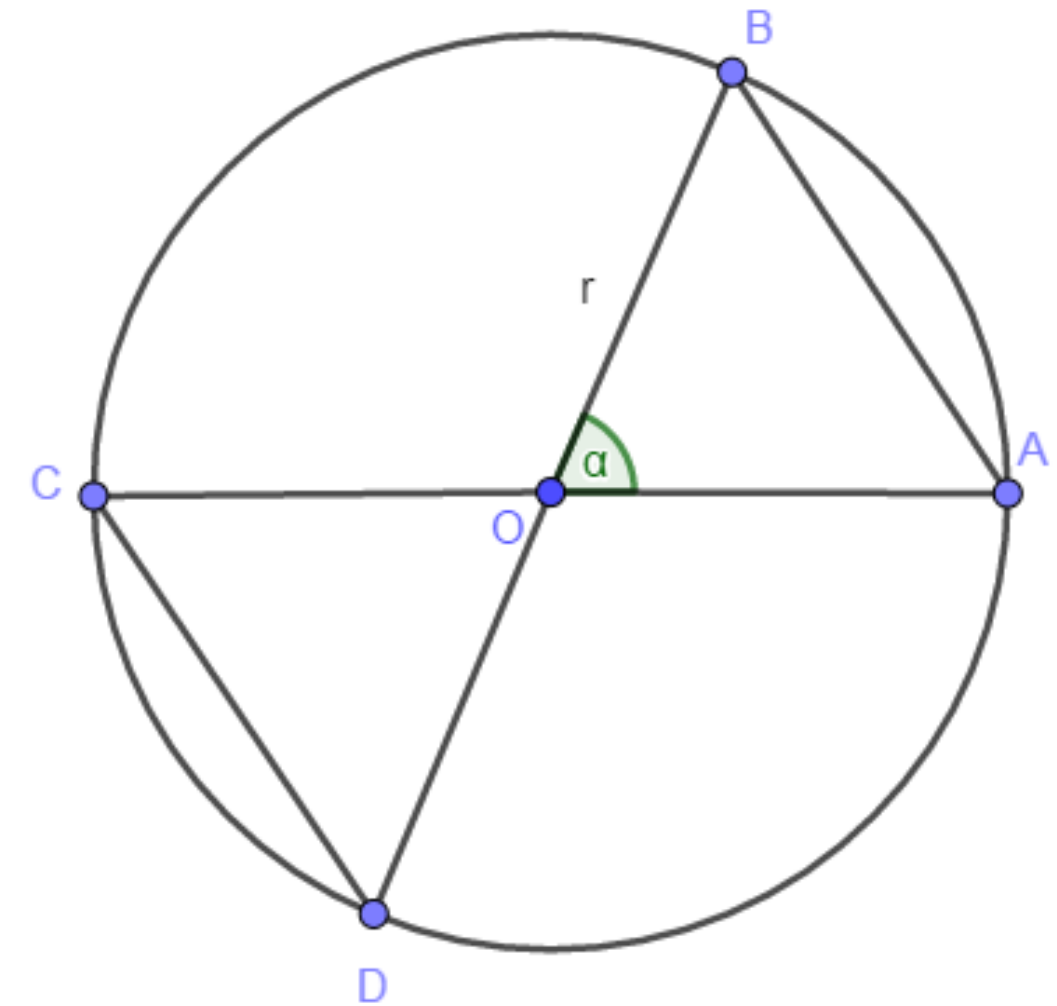
Pentatito G & Mella T

Dalam suatu lingkaran, pada tali busur yang sama terletak sudut pusat dan busur yang sama

Diketahui: $A, B, C,$ dan D titik-titik pada lingkaran dan $AB = CD$

Akan dibuktikan: $\angle AOB = \angle COD$ dan $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

Buktikan !



Teorema 5.4

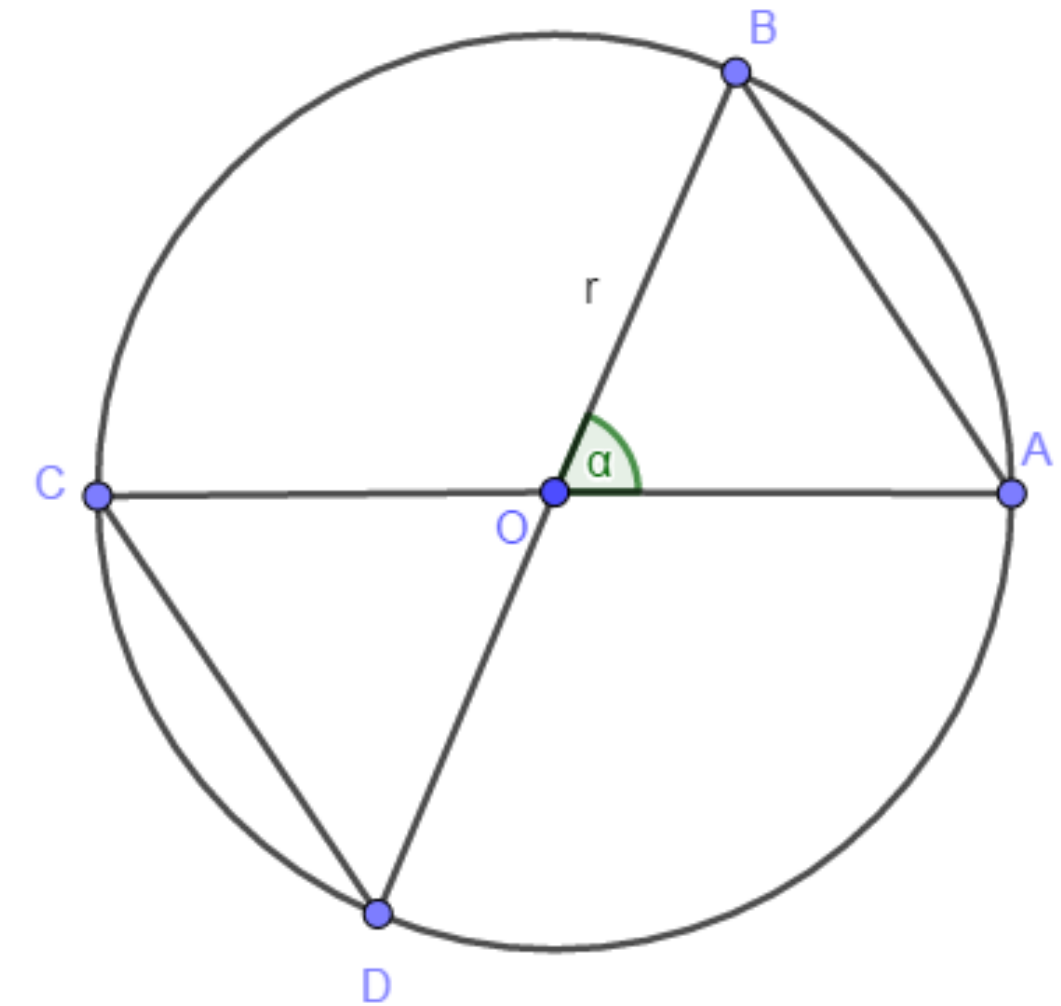
Pentatito G & Mella T

Dalam suatu lingkaran, pada busur yang sama terletak tali busur dan sudut pusat yang sama.

Diketahui: $A, B, C,$ dan D titik-titik pada lingkaran dan $\widehat{AB} = \widehat{CD}$

Akan dibuktikan: $\angle AOB = \angle COD$ dan $AB=CD$

Buktikan!



Teorema 5.5

Pentatito G & Mella T

Teorema 5.5 Dalam suatu lingkaran, perbandingan dua sudut pusat sama dengan perbandingan busurnya masing-masing.

Diketahui : A, B, C , dan D titik-titik pada lingkaran

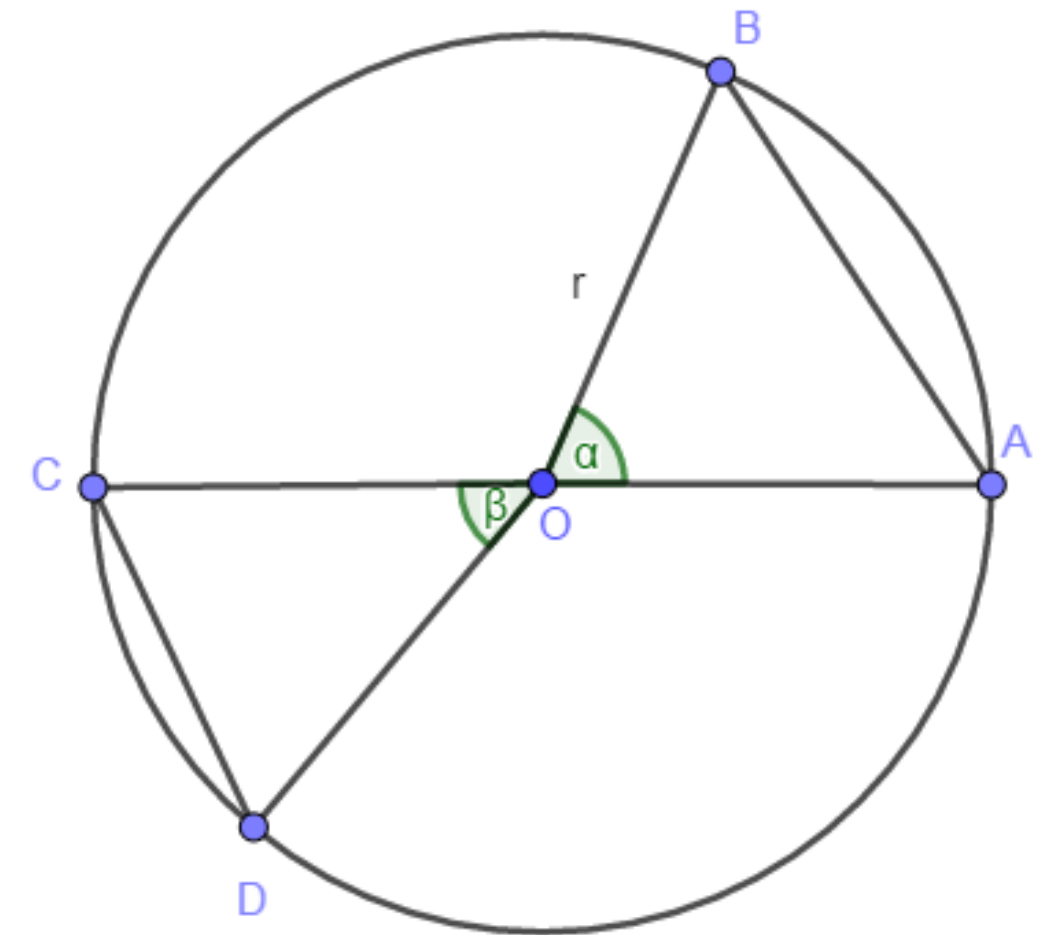
Akan dibuktikan:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{AB}}$$

Bukti : Andaikan $\alpha : \beta = p : q$, karena α dan β menghadap busur CD dan busur AB maka terdapat $p + q$ busur yang sama besar pada kedua busur tersebut, dengan p banyak busur pada busur CD dan q banyak busur pada busur AB .

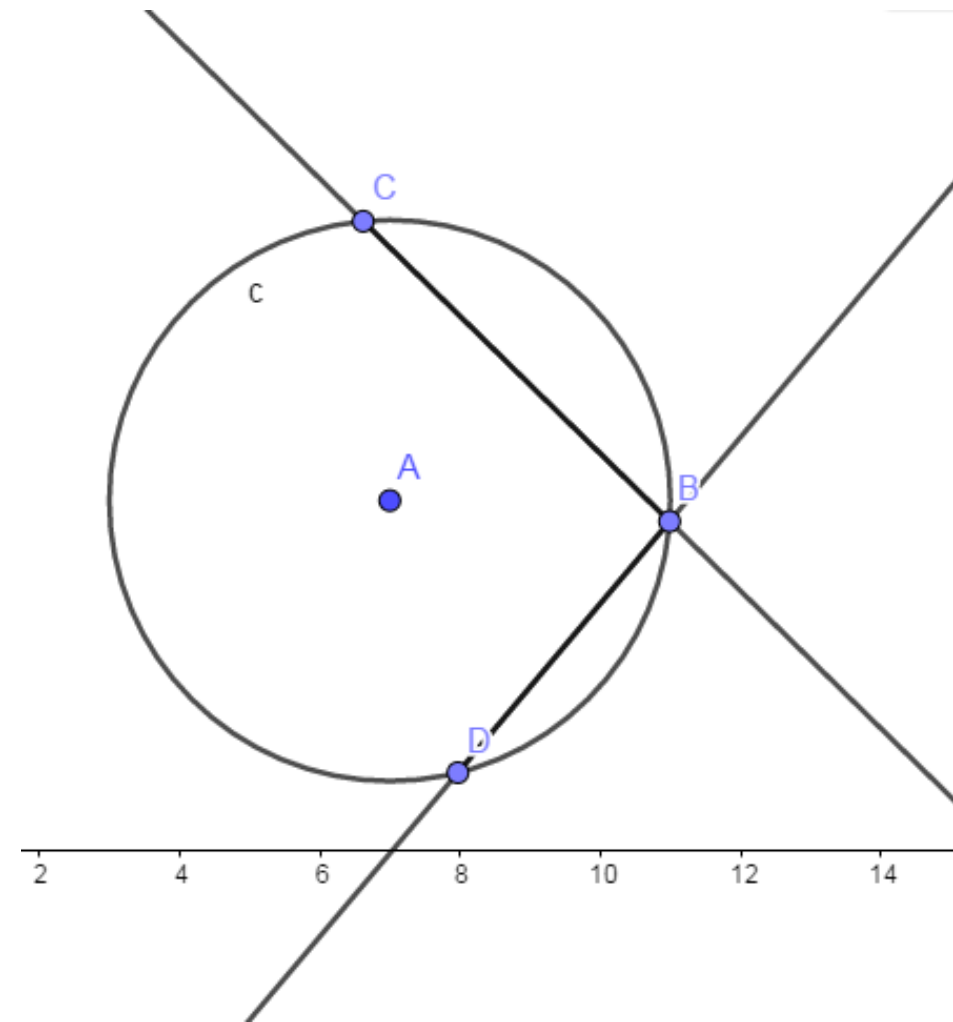
Ini berarti busur CD terbagi atas p bagian busur yang sama dan busur AB terbagi atas q bagian busur sama. Jadi busur $CD : busur AB = p : q$, sehingga

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\widehat{CD}}{\widehat{AB}}$$

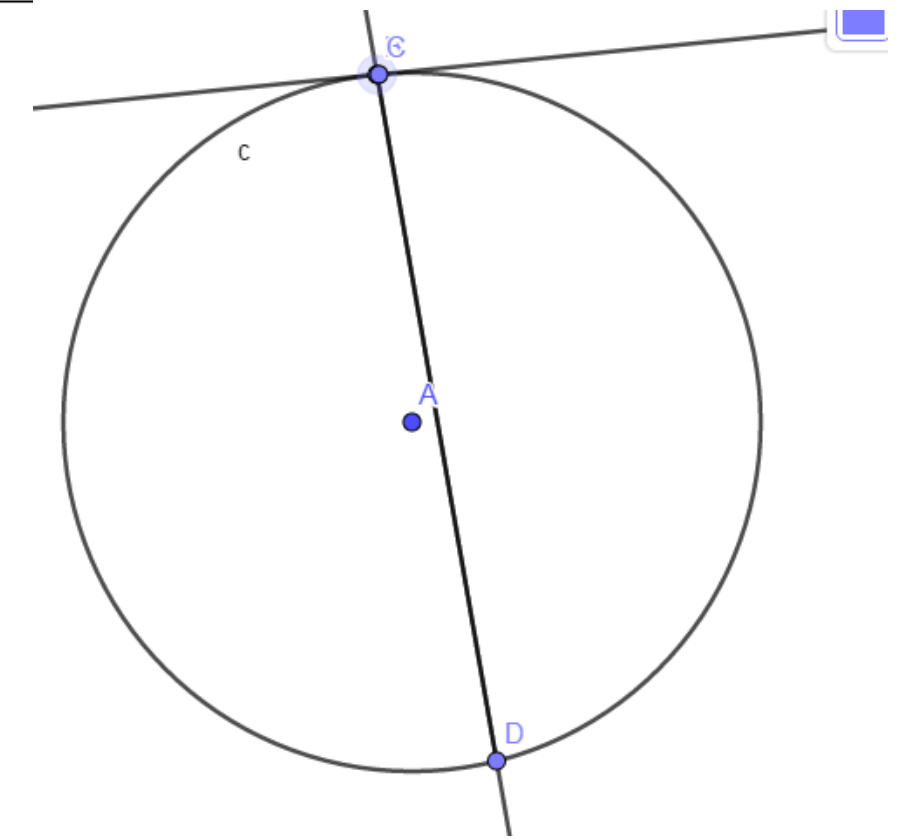


Definisi Sudut Keliling

- i. **Sudut keliling pada** suatu lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya terletak **pada lingkaran** tersebut dan kaki-kaki sudut memotong lingkaran atau kaki yang satu memotong sedang kaki yang lain menyinggung lingkaran tersebut.

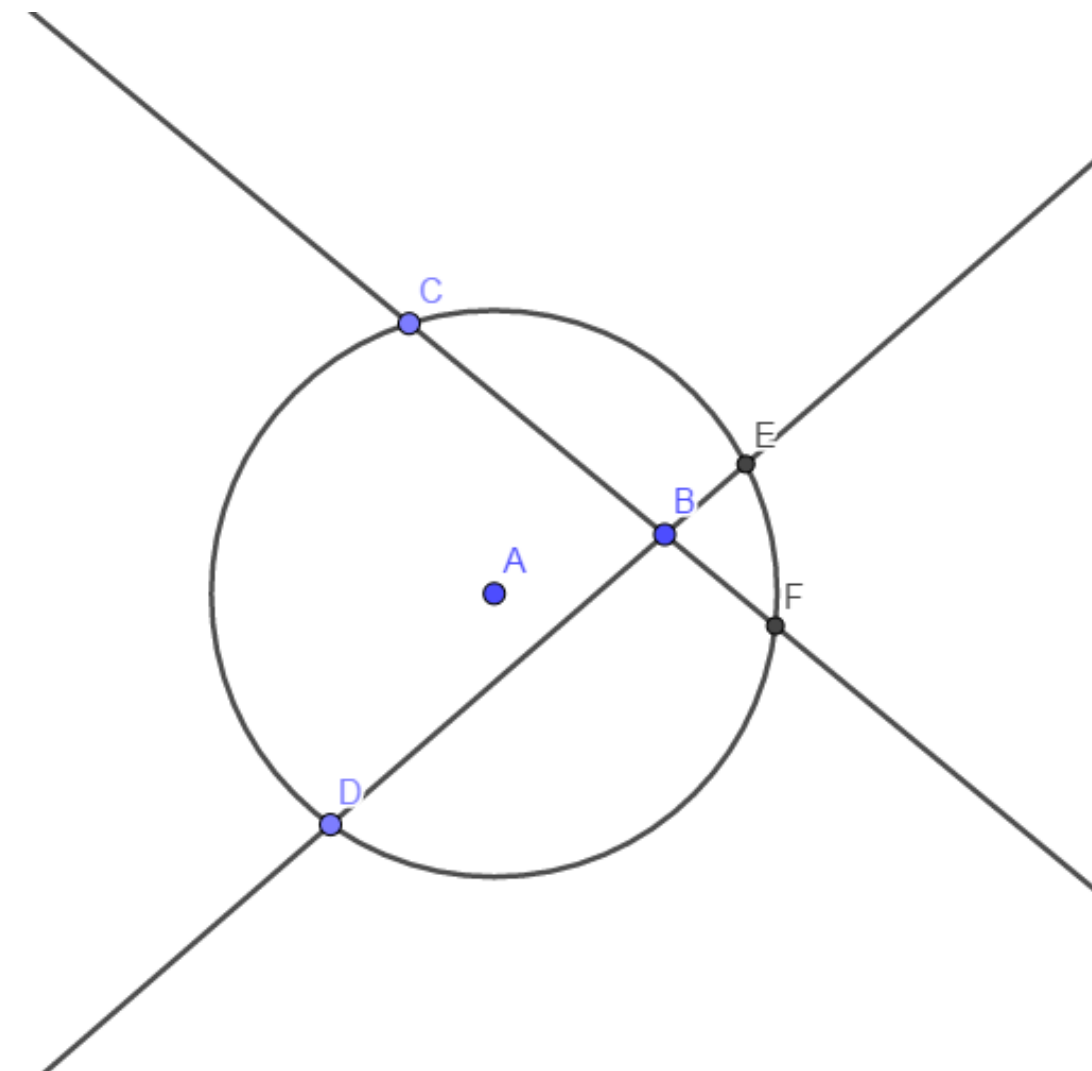


Pentatito G & Mella T



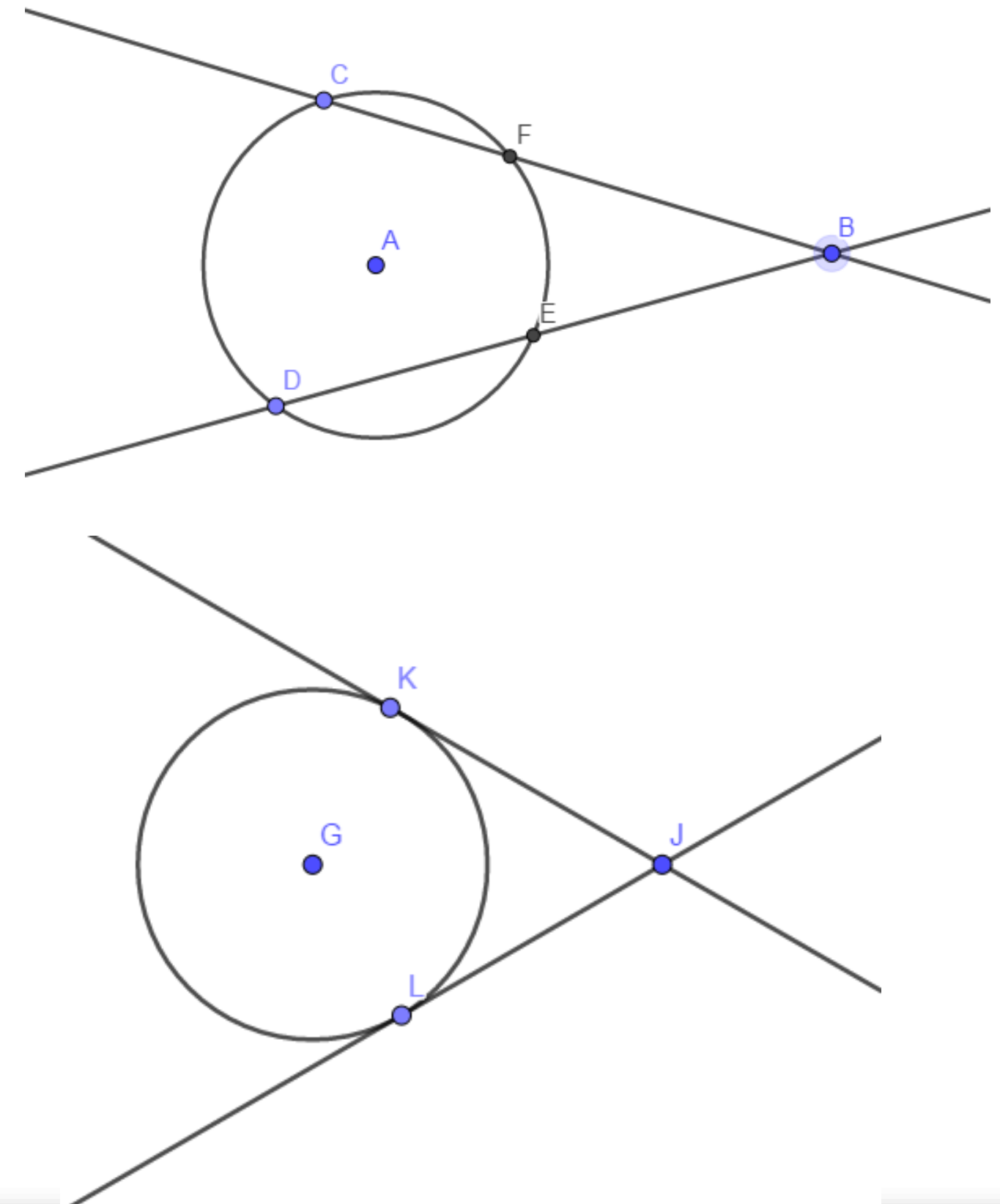
Definisi Sudut Keliling dalam

- ii. **Sudut keliling dalam** suatu lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya terletak di **daerah interior (dalam) lingkaran** tersebut dan kaki-kaki sudut memotong lingkaran.



Definisi Sudut Keliling Luar

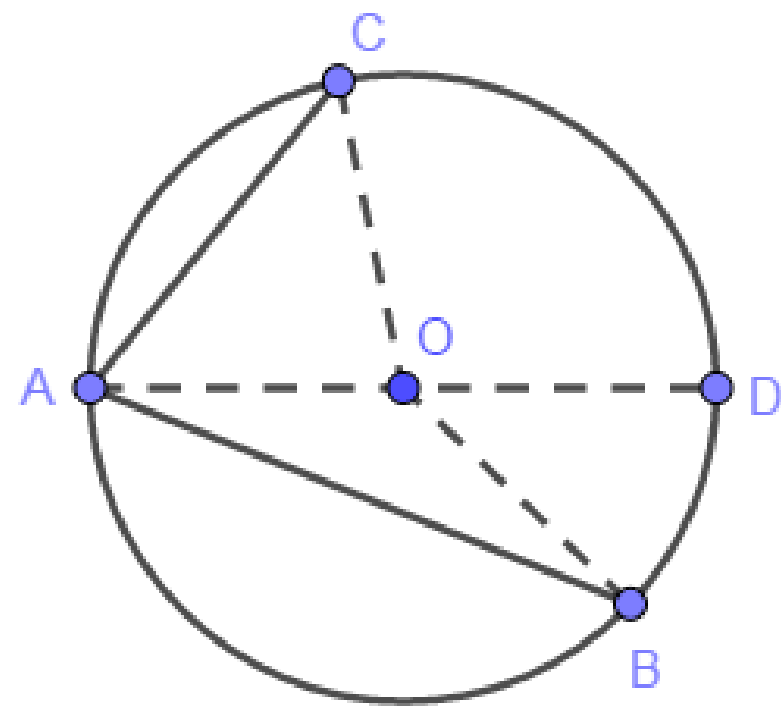
iii. **Sudut keliling luar** suatu lingkaran adalah sebuah sudut yang titik sudutnya terletak **di daerah eksterior (luar) lingkaran** tersebut dan kaki-kaki sudut memotong lingkaran atau menyinggung lingkaran tersebut.



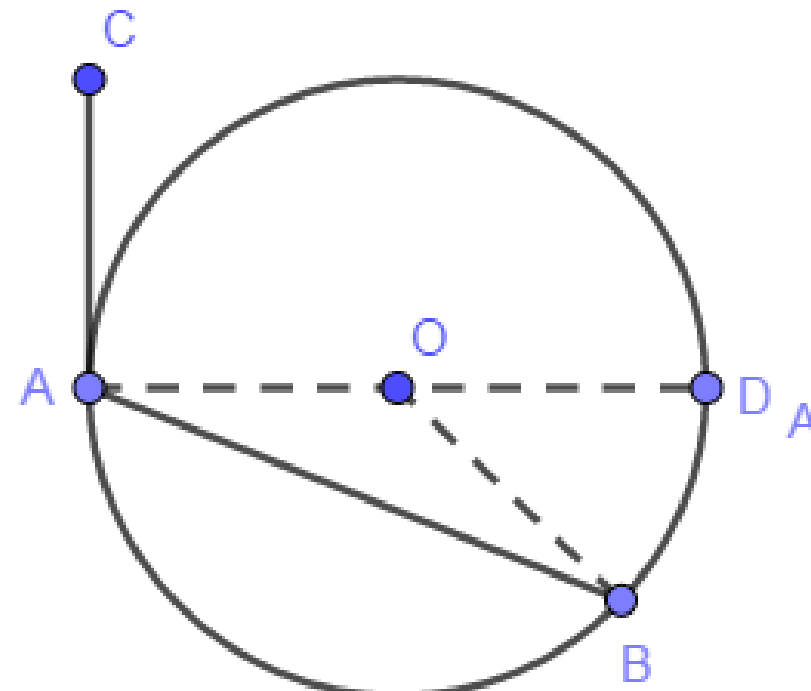
Teorema 5.6

Besar sudut keliling pada suatu lingkaran sama dengan setengah sudut pusat yang menghadap busur yang sama dari lingkaran tersebut

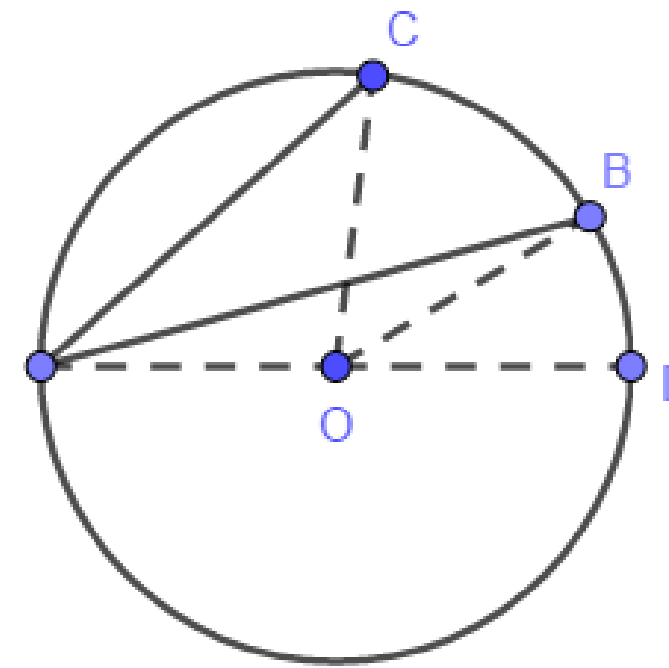
Untuk membuktikan teorema ini ada 4 kasus,



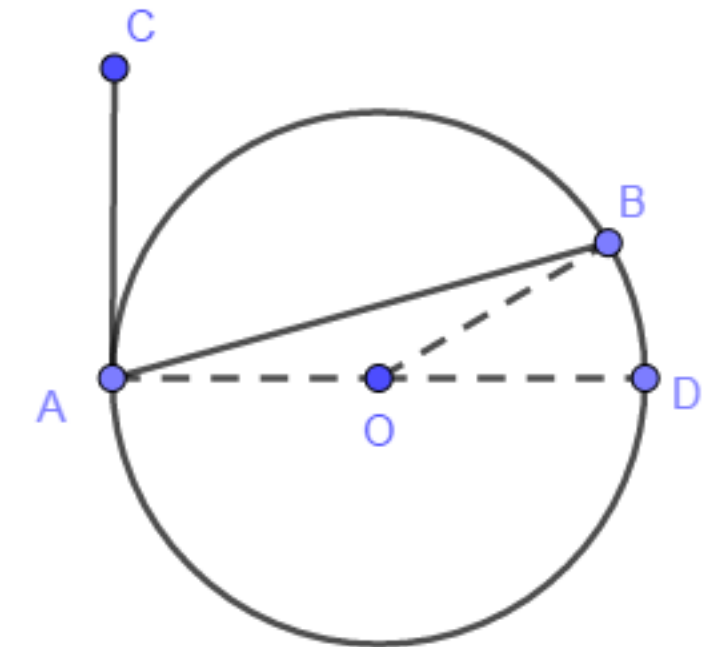
KASUS 1



KASUS 2



KASUS 3



KASUS 4

Bukti Kasus 1.

Diketahui: Titik A , B , C , dan D terletak pada lingkaran O

Akan dibuktikan:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

Pentatito G & Mella T

Bukti:

Tarik garis tengah AD dan lukis jari-jari OC dan OB .

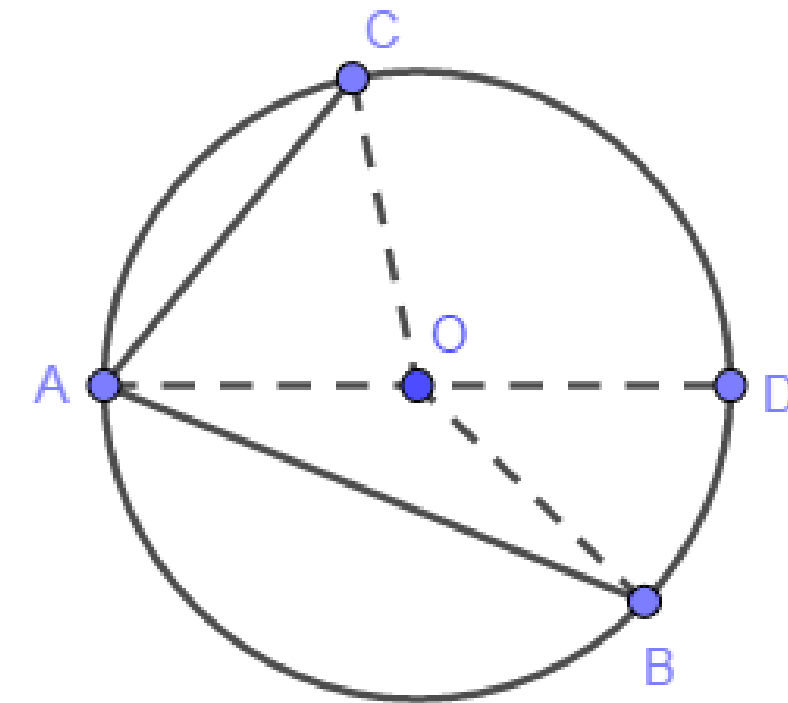
$\angle COD$ sudut luar $\triangle AOC$, jadi $\angle COD = \angle DAC + \angle ACO$

$\triangle AOC$ sama kaki jadi $\angle DAC = \angle ACO$

Sehingga $\angle COD = 2 \angle DAC$ atau $\angle DAC = \frac{1}{2} \angle COD$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa $\angle DAB = \frac{1}{2} \angle BOD$

Sehingga diperoleh $\angle BAC = \angle DAC + \angle DAB = \frac{1}{2}(\angle COD + \angle BOD) = \frac{1}{2} \angle BOC$



KASUS 1

Bukti kasus 4.

Diketahui: Titik A , B , dan D terletak pada lingkaran O dan AC garis singgung

Akan dibuktikan:

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle AOB$$

Bukti:

Tarik garis tengah AD dan lukis jari-jari OB .

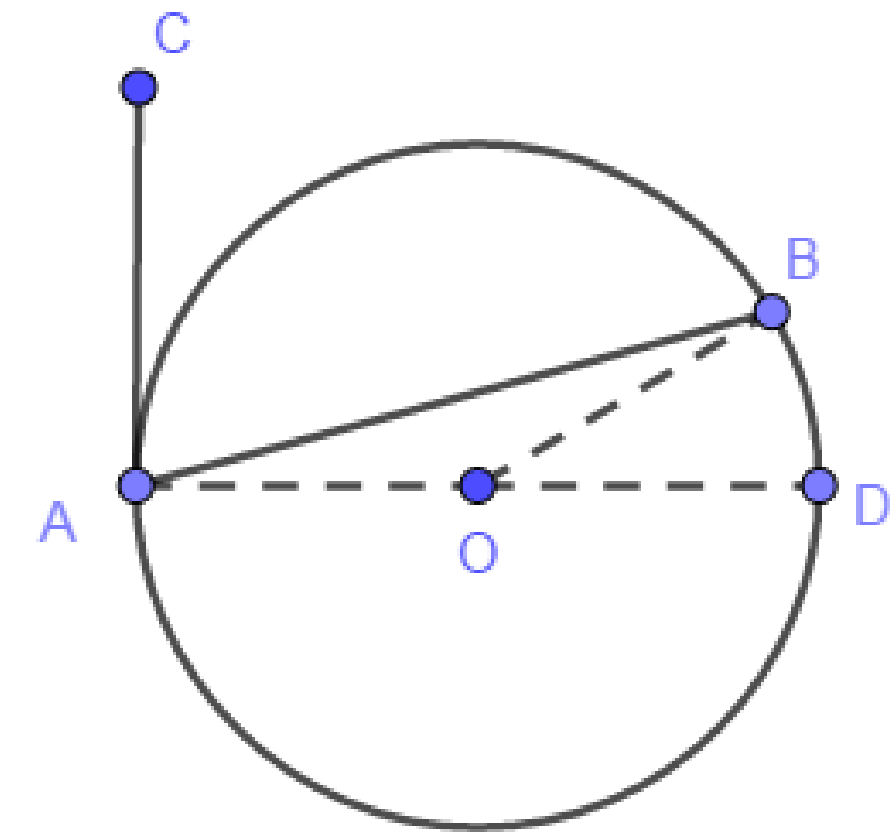
Dari bukti kasus 1, telah diperoleh bahwa $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$

Karena OC garis singgung maka $\angle CAD = 90^\circ$, sehingga

$$\angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle BOD$$

$\angle BOD$ pelurus dari $\angle AOB$, jadi $\angle BOD = 180^\circ - \angle AOB$

Sehingga diperoleh $\angle BAC = 90^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AOB) = \frac{1}{2} \angle AOB$



KASUS 4

kasus 2 dan kasus 3 Anda buktikan sebagai latihan!

Teorema 5.7

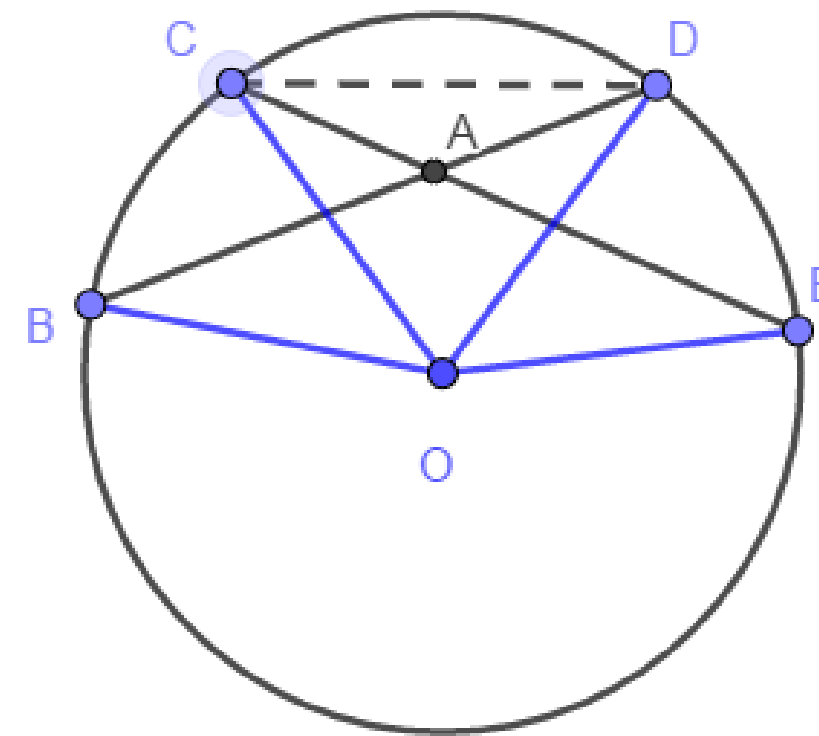
Besar **sudut keliling dalam** suatu lingkaran sama dengan setengah jumlah besar kedua sudut pusat yang menghadap busur yang terbentuk oleh sudut itu dan sudut bertolak belakangnya.

Diketahui: Titik A pada daerah interior lingkaran O, titik B, C, D, dan E pada lingkaran

Akan dibuktikan:

$$\angle BAC = \frac{1}{2}(\angle BOC + \angle EOD)$$

Buktikan sebagai latihan

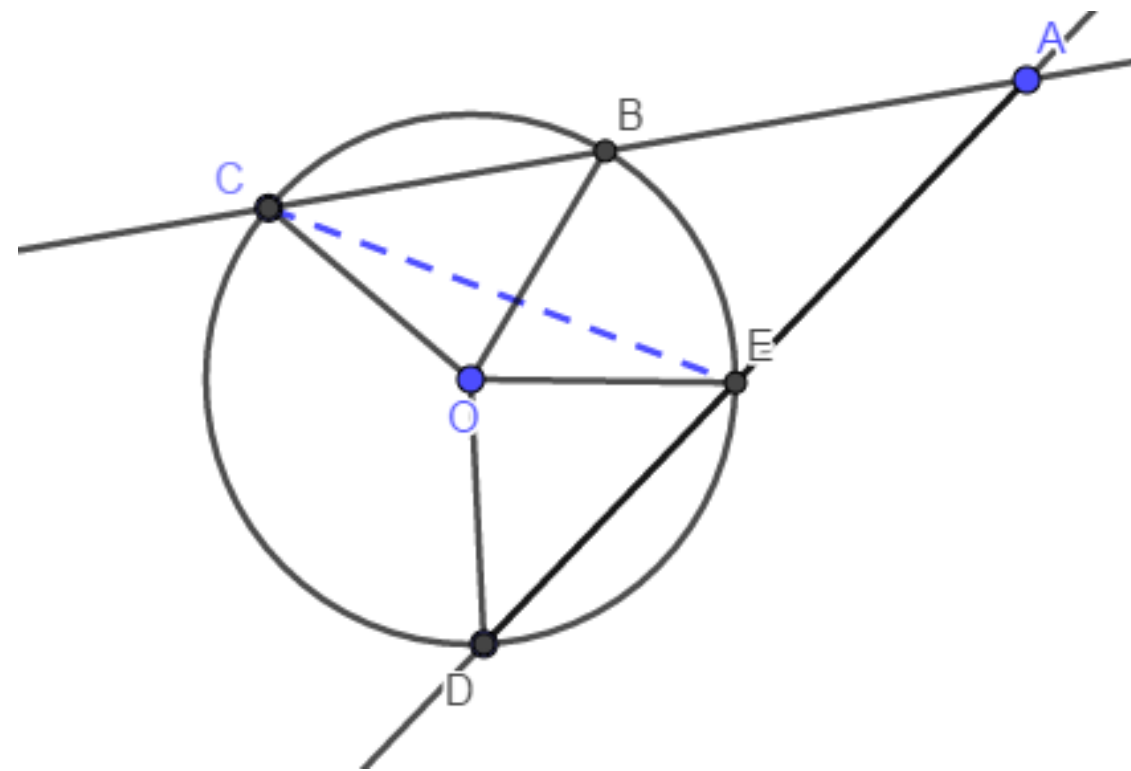


Teorema 5.8

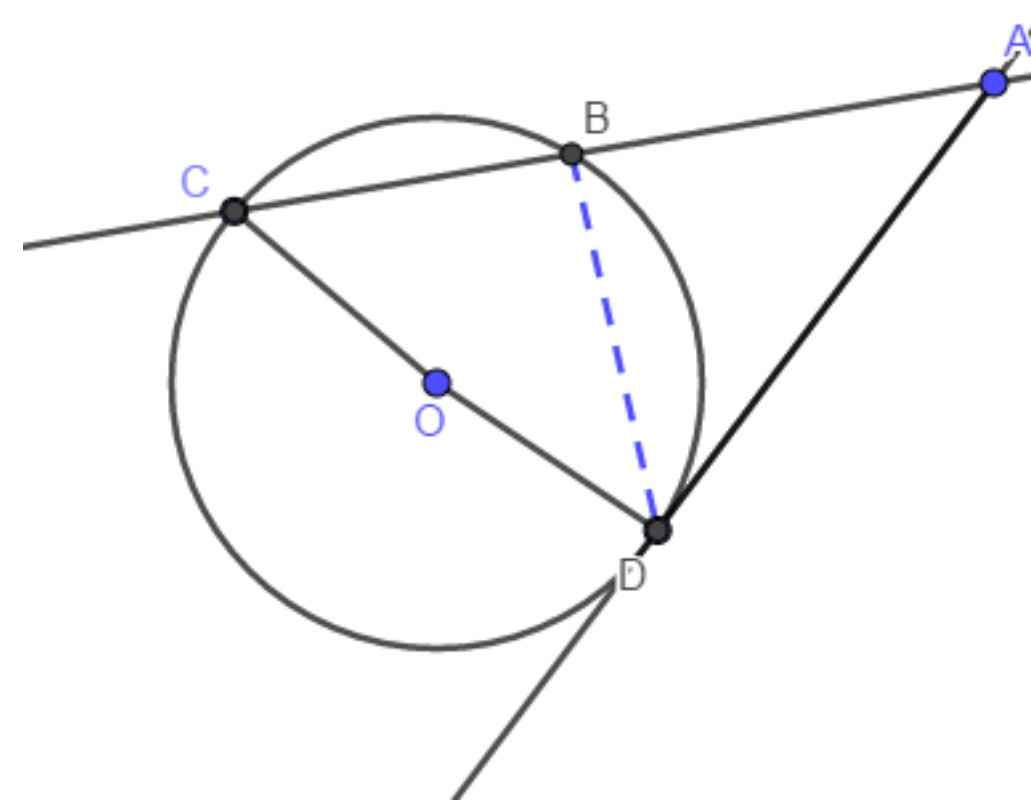
Pentatito G & Mella T

Besar sudut keliling luar suatu lingkaran sama dengan **setengah selisih** besar kedua sudut pusat yang menghadap busur yang terbentuk oleh sudut itu.

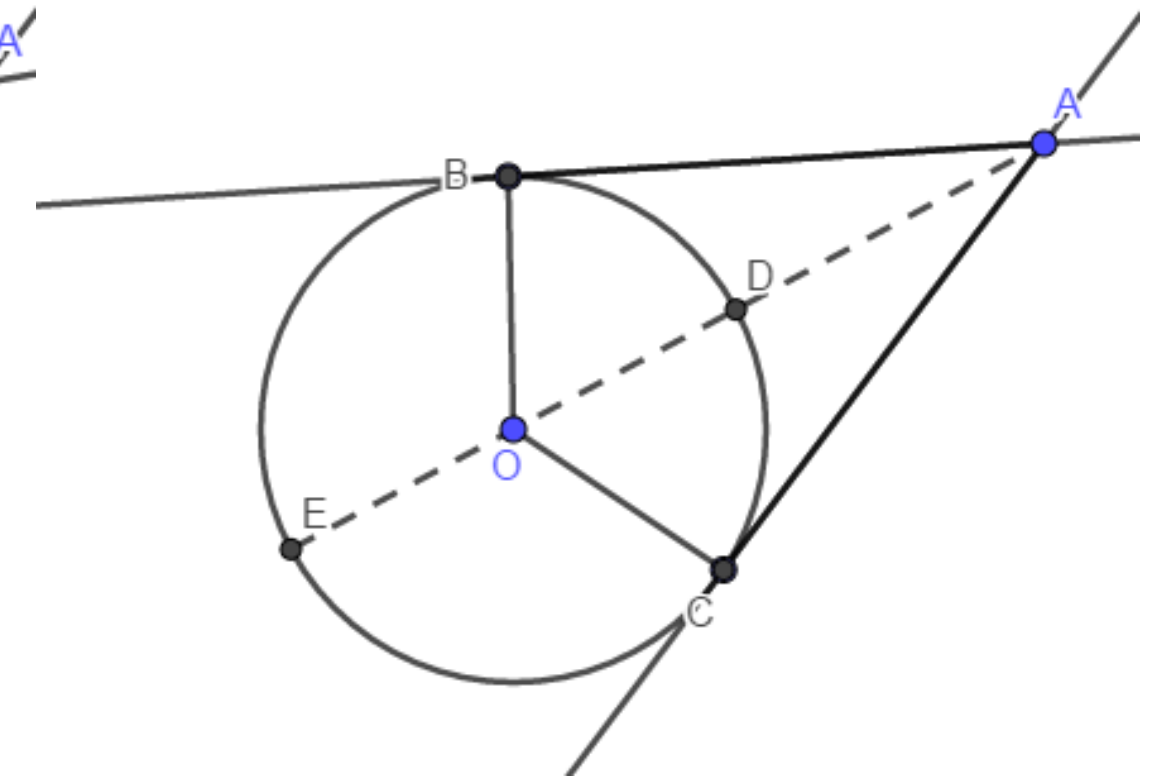
Untuk membuktikan harus ditinjau dari tiga kasus, perhatikan gambar berikut.



KASUS 1



KASUS 2



KASUS 3

Kasus 1

Pentatito G & Mella T

Diketahui: Titik sudut A terletak di luar lingkaran berpusat di O dan kaki-kaki sudut A memotong lingkaran di B, C, D, dan E

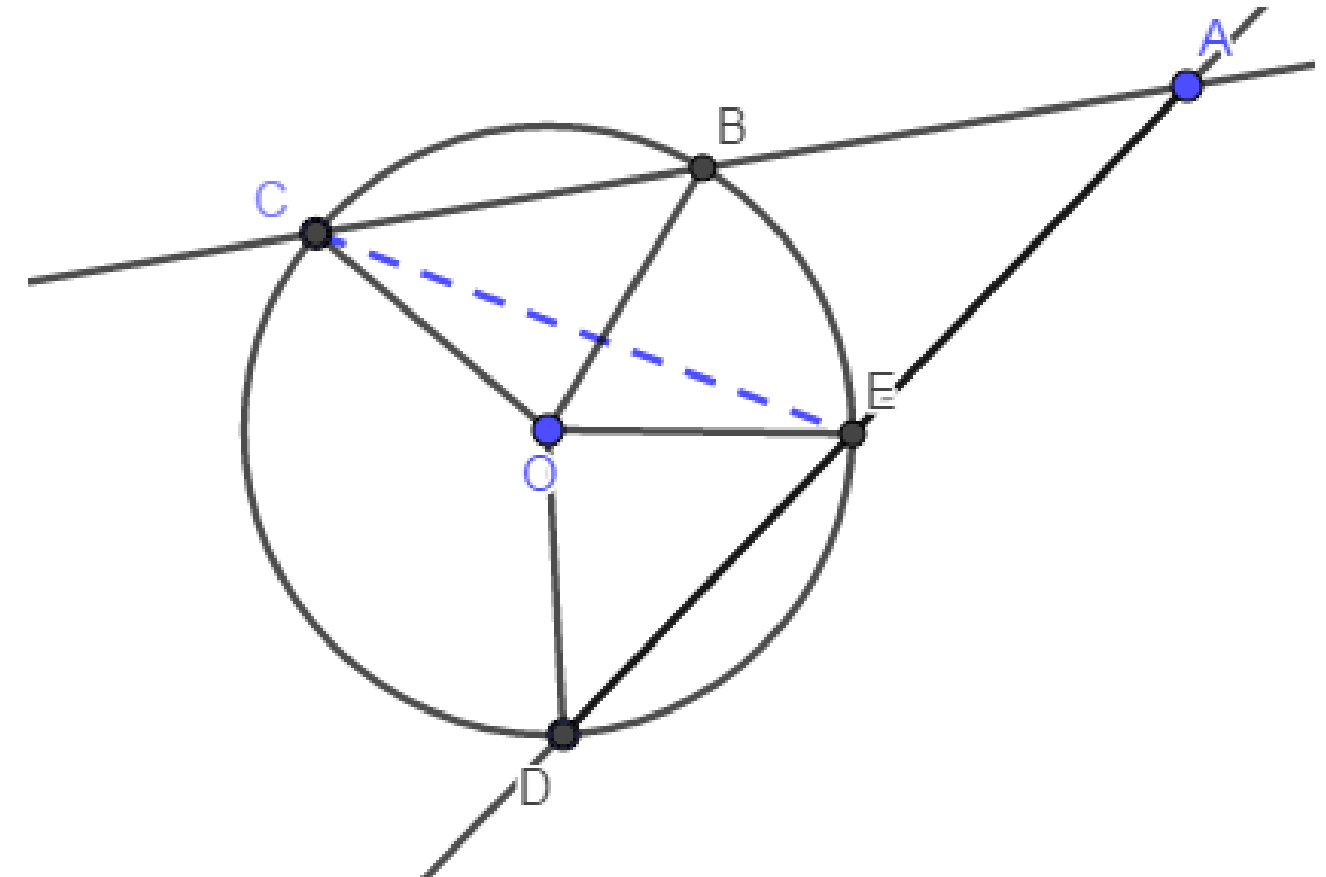
Akan dibuktikan: $\angle A = \frac{1}{2}(\angle COD - \angle BOE)$

Bukti :

Tarik garis CE, $\angle CED$ maka sudut luar $\triangle ACE$, sehingga

$$\angle A = \angle CED - \angle BCE = \frac{1}{2} \angle COD - \frac{1}{2} \angle BOE = \frac{1}{2}(\angle COD - \angle BOE)$$

Untuk Latihan silahkan Anda buktikan untuk kasus yang lain



EXERCISE

Buktikan Teorema-teorema yang belum dibuktikan