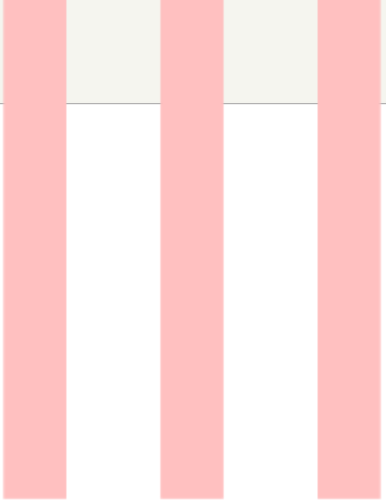
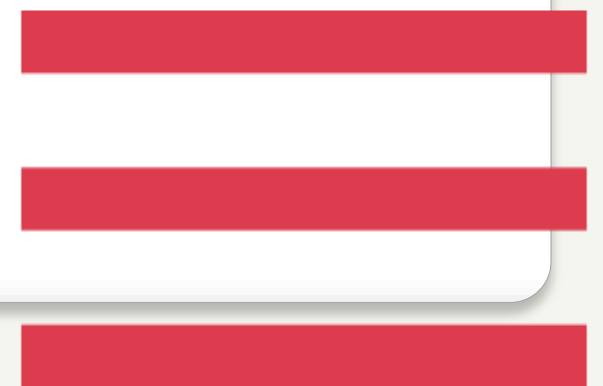




Titik, Garis dan Bidang dalam Ruang

Drs. Pentatito Gunowibowo, M.Pd.
Mella Triana, S.Pd., M.Pd.



Jika geometri bidang (*planemetrie*) membahas tentang sifat-sifat bangun yang terletak pada satu bidang datar maka sifat-sifat benda atau bangun yang tidak terletak pada satu bidang datar di sebut geometri ruang (*stereometrie*).

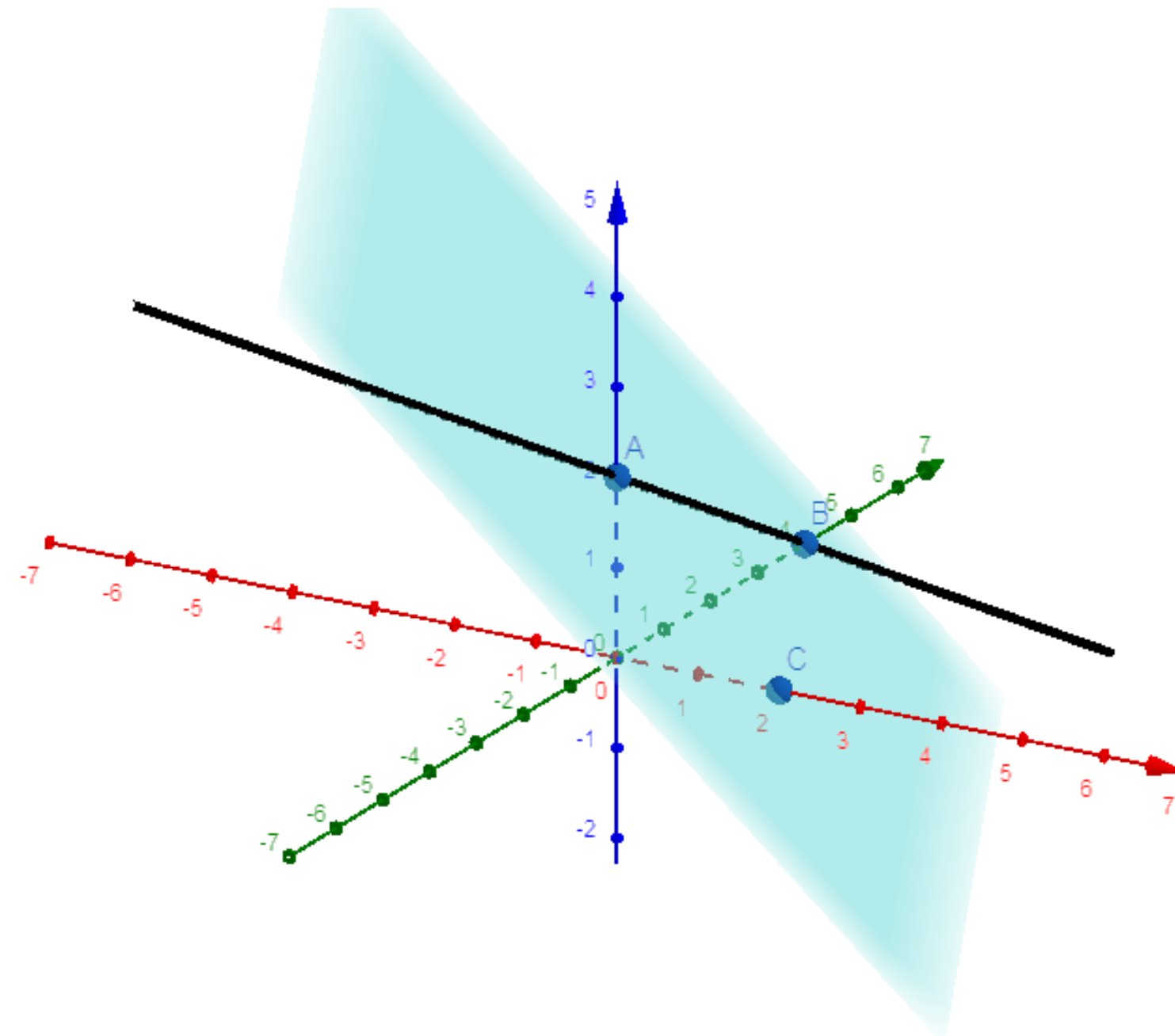
Teorema 1. Melalui sebuah garis AB dapat dibuat bidang datar tak berhingga banyaknya. (Ditunjukkan dengan gambar)

<https://www.geogebra.org/3d/pyatbpdt>

Teorema 2. Melalui tiga titik A, B, dan C yang tidak kolinier, terdapat tepat satu bidang datar. (Dibuat bidang melalui garis AB, hanya akan ada satu bidang yang memuat C)

<https://www.geogebra.org/3d/n3stgSVX>

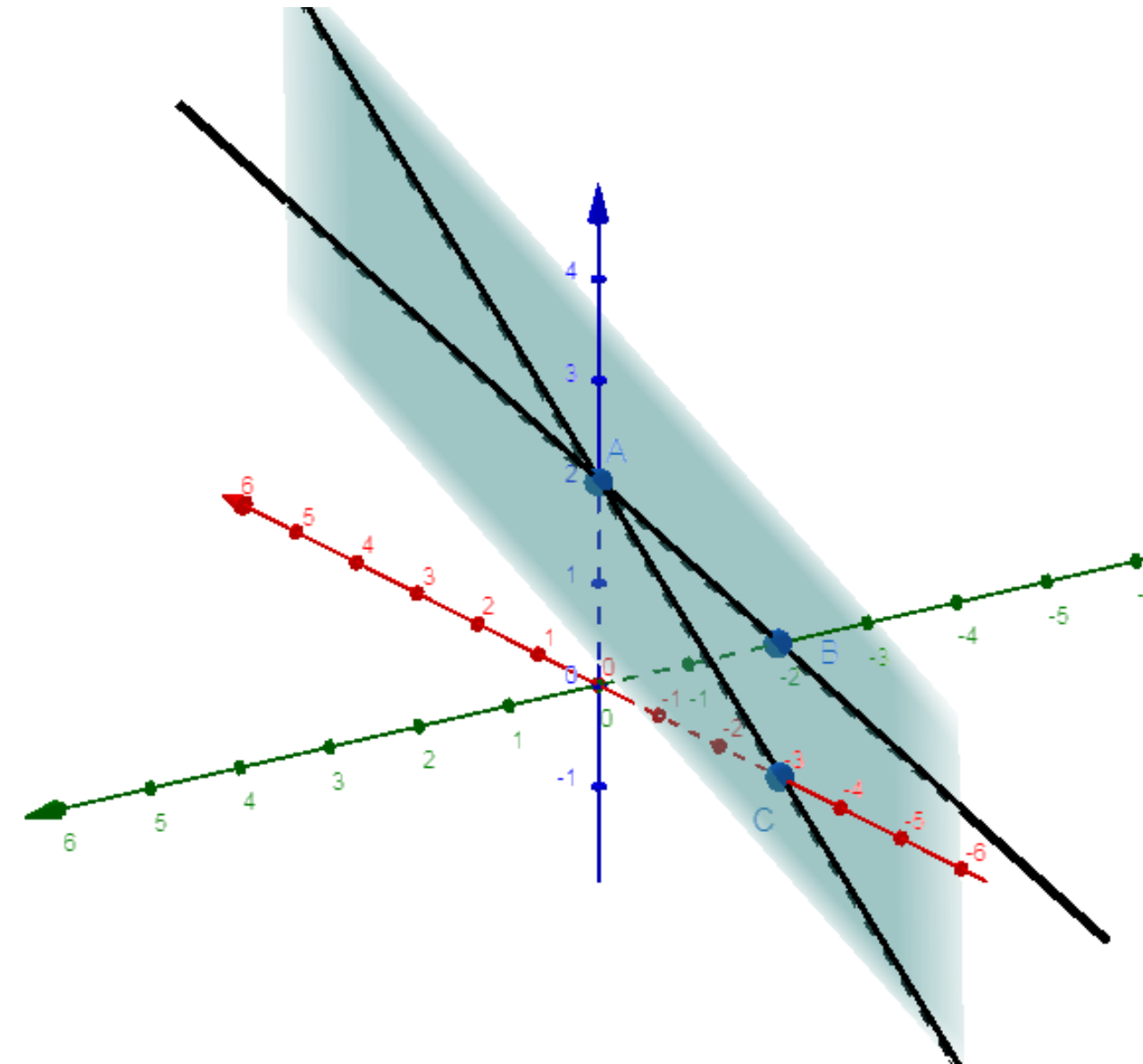
Teorema 3. Melalui sebuah garis dan sebuah titik yang tidak terletak pada garis itu, terdapat tepat satu bidang. (Gunakan teorema 2)



Teorema 4.

Melalui dua garis AB dan AC yang berpotongan terdapat tepat satu bidang. (Gunakan teorema 2)

<https://www.geogebra.org/3d/akgyd eve>



2. Sepasang garis lurus

Jika kita mempunyai dua garis AB dan CD, maka melalui AB dan titik P pada CD dapat kita lukis sebuah bidang datar α (Teorema 3). Dengan demikian ada dua kemungkinan, yakni

1) CD terletak pada bidang α , sehingga kedua garis pada bidang ini berarti ada dua kemungkinan, yaitu kedua garis berpotongan

(<https://www.geogebra.org/3d/q9xrjq9b>) atau sejajar (<https://www.geogebra.org/3d/zfpjzzz4>)

2) CD tidak terletak pada bidang α , sehingga CD dikatakan memotong bidang α , sedangkan garis AB dan CD dikatakan bersilangan.

(<https://www.geogebra.org/3d/ven898yd>)

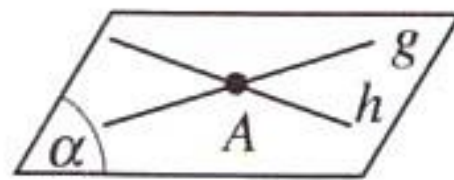
Untuk ilustrasi gambar silahkan klik pada link-link di atas

2. Sepasang garis lurus

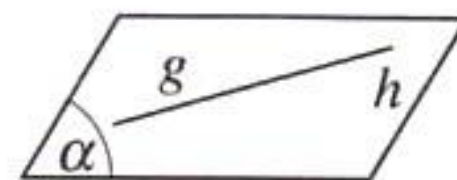
Pentatito G & Mella T

Kesimpulan:

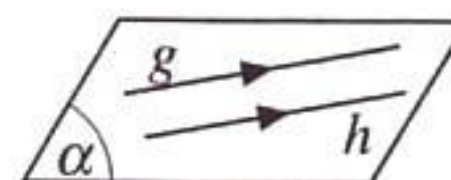
1. Dua garis dikatakan berpotongan, jika kedua garis itu terletak pada satu bidang datar dan mempunyai satu titik persekutuan.
2. Dua garis dikatakan berimpit, jika kedua garis itu terletak pada satu bidang datar dan semua titik dari garis yang satu bersekutu dengan garis yang lain.
3. Dua garis dikatakan sejajar, jika keduanya terletak pada satu bidang datar dan tidak mempunyai titik persekutuan.
4. Dua garis dikatakan bersilangan, jika keduanya tidak terletak pada satu bidang datar.



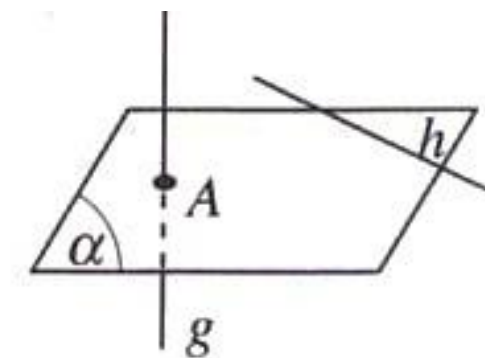
Garis g dan h
berpotongan
di titik A



Garis g dan h
berimpit



Garis g dan h
sejajar

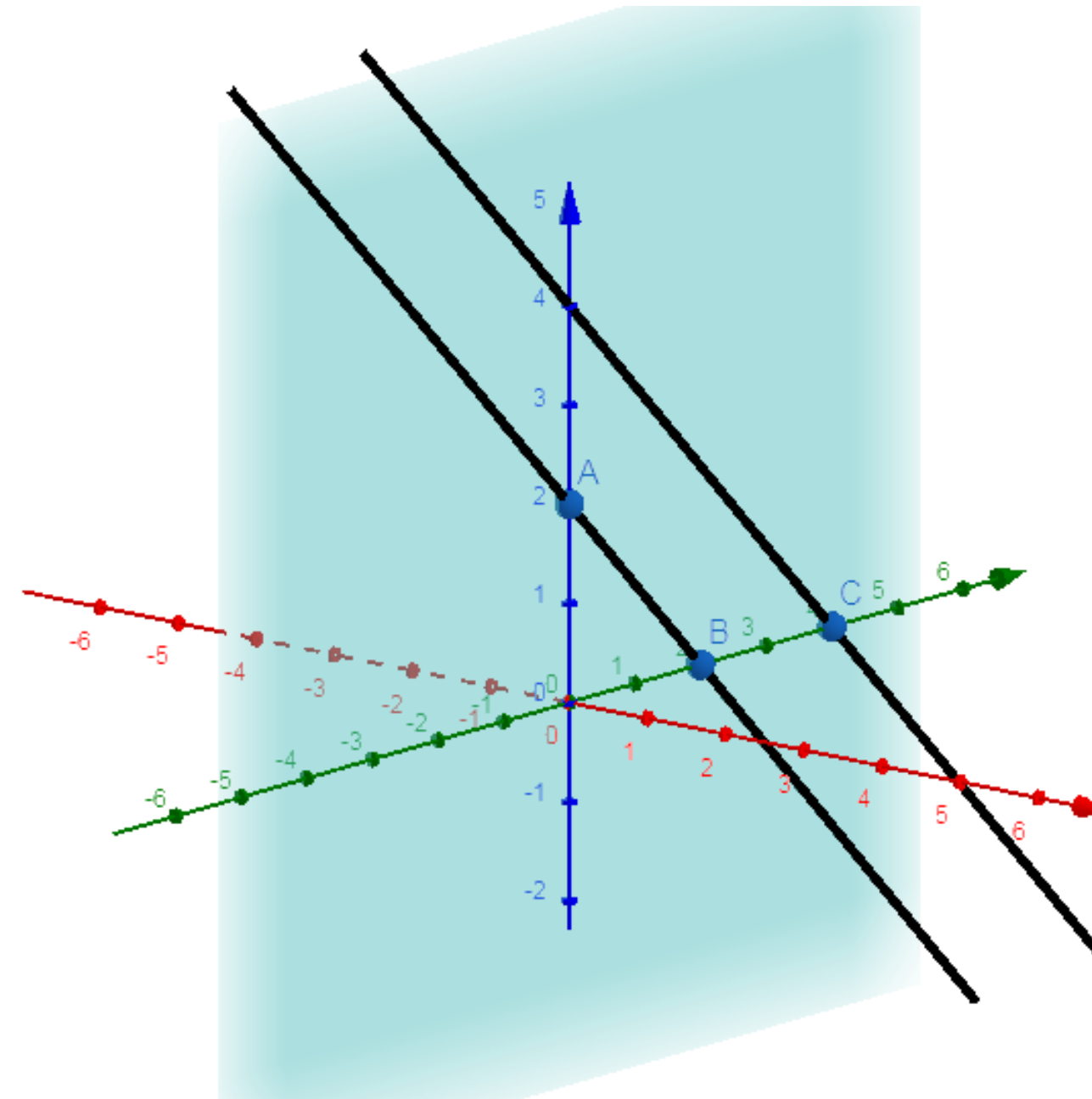


Garis g dan h
bersilangan

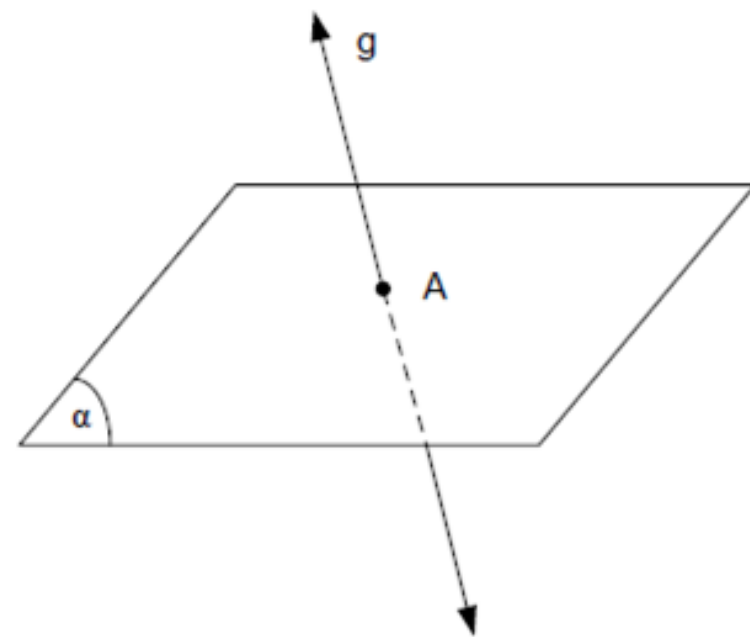
Teorema 5. Melalui titik C di luar garis AB hanya dapat di buat tepat satu garis yang sejajar AB.

Bukti:

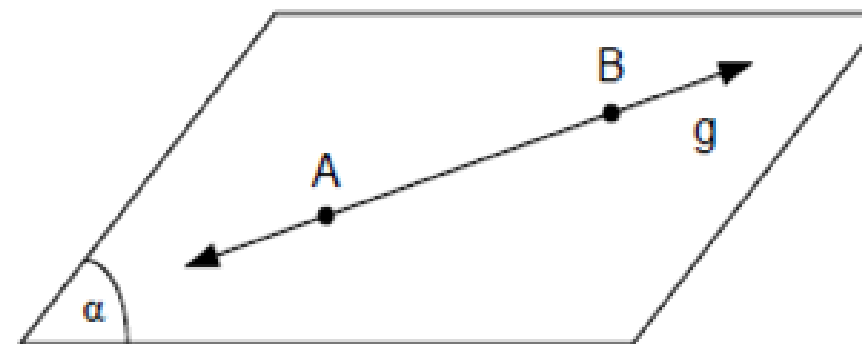
Menurut teorema 3. Melalui AB dan C hanya terdapat satu bidang. Menurut geometri bidang melalui titik C di luar garis AB terdapat tepat satu garis yang sejajar AB.



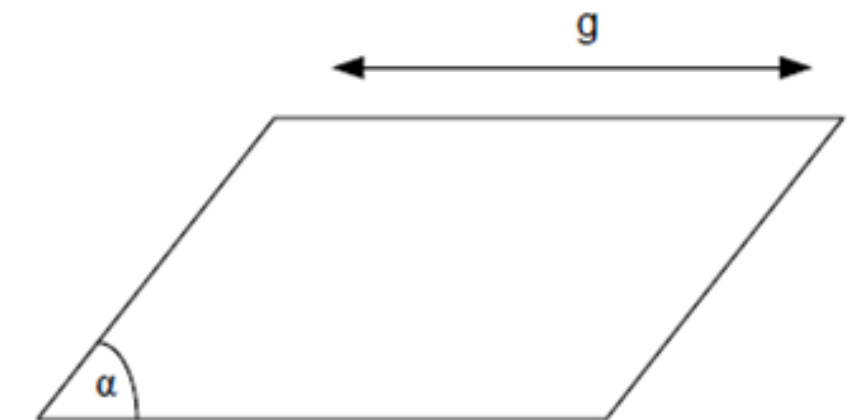
Kedudukan Garis Pada Bidang



Suatu garis dikatakan **memotong (menembus)** sebuah bidang apabila garis dan bidang tersebut memiliki satu titik sekutu, titik sekutunya disebut titik potong atau titik tembus. Selanjutnya, suatu garis / dikatakan **tegak lurus** dengan bidang , jika garis itu tegak lurus dengan semua garis pada bidang yang melalui titik potong garis / dengan bidang .



Suatu garis dikatakan **terletak** pada suatu bidang apabila setiap titik pada garis terletak pada bidang itu. Karena melalui 2 titik terdapat tepat satu garis, akibatnya apabila 2 titik suatu garis terletak pada suatu bidang maka garis tersebut terletak pada bidang itu.



Suatu garis dikatakan tidak terletak pada suatu bidang jika tidak ada satupun titik pada garis itu yang terletak pada bidang itu.

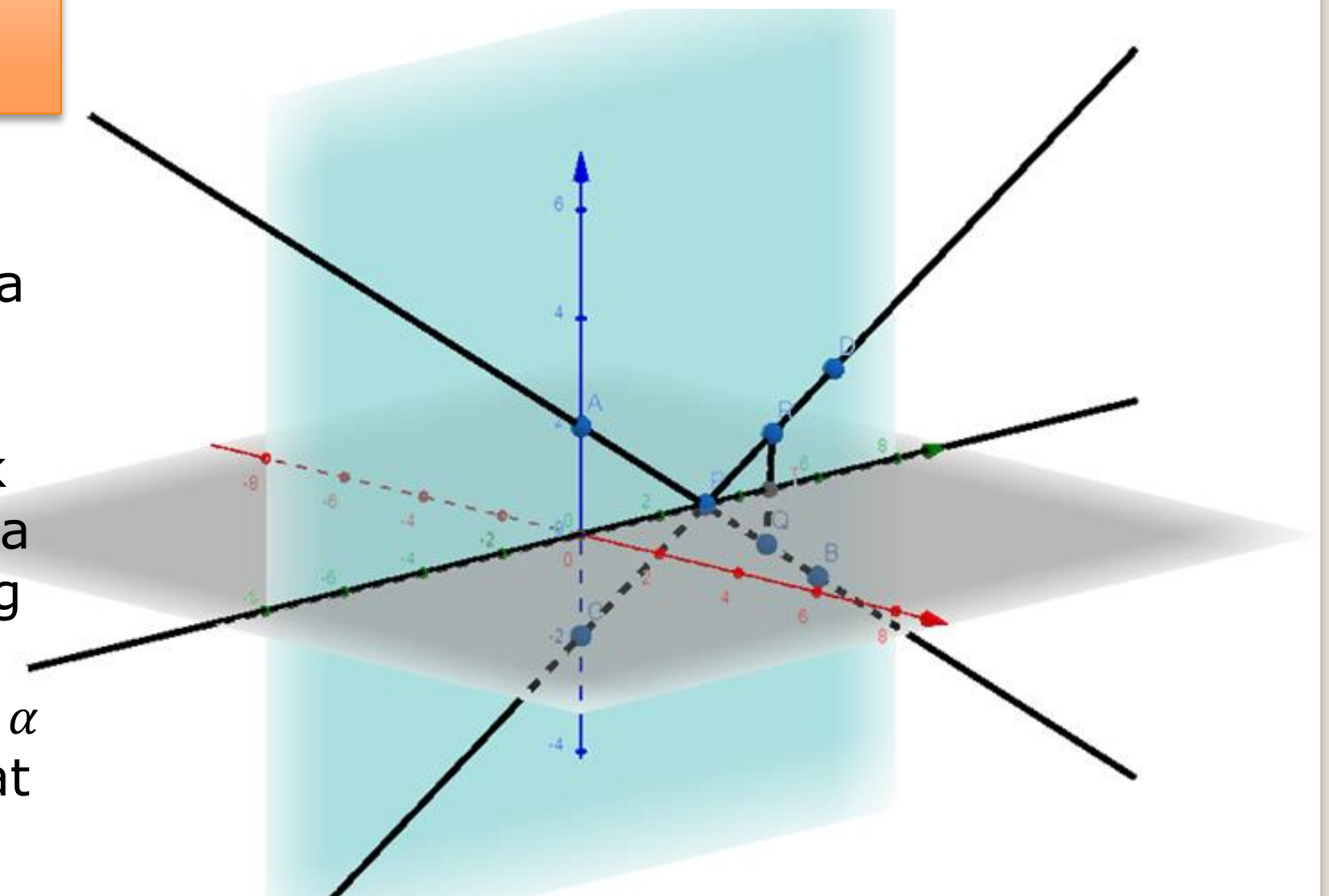
Sepasang Bidang Datar

Teorema 6. Jika dua bidang α dan β mempunyai satu titik persekutuan P, maka kedua bidang itu juga mempunyai satu garis persekutuan ℓ yang melalui P.

Bukti: Lukislah melalui titik P garis AB dan CD yang terletak pada bidang β dengan B dan D terletak berlainan pihak terhadap bidang α . Ambil titik Q pada PB dan R pada PC, dan lukislah garis QR. Karena Q dan R terletak berlainan pihak terhadap bidang α maka garis QR menembus bidang α di satu titik T, titik T merupakan titik persekutuan garis QR dan bidang α maka PT terletak pada bidang α . Jadi PT adalah garis persekutuan antara bidang α dan β .

Garis persekutuan ini di sebut garis potong antara bidang α dan β di sajikan sebagai (α, β) . Garis ini merupakan tempat kedudukan titik-titik persekutuan antara bidang α dan β . Dua bidang yang tidak mempunyai garis persekutuan di sebut sejajar.

Link geogebra : <https://www.geogebra.org/3d/uygz3pyr>



Ket : bidang α (berwarna abu-abu)
bidang β (berwarna biru)

Dalam geometri ruang kita tidak mungkin melukis benda dengan keadaan (ukuran) sebenarnya. Jika kita melukis suatu benda, maka yang kita lukis itu sebenarnya adalah proyeksi benda itu.

Dalam melukis proyeksi benda itu, sinar-sinar yang jatuh pada benda itu kita anggap sejajar, maka tergantung pada jatuhnya sinar pada benda, kita dapat:

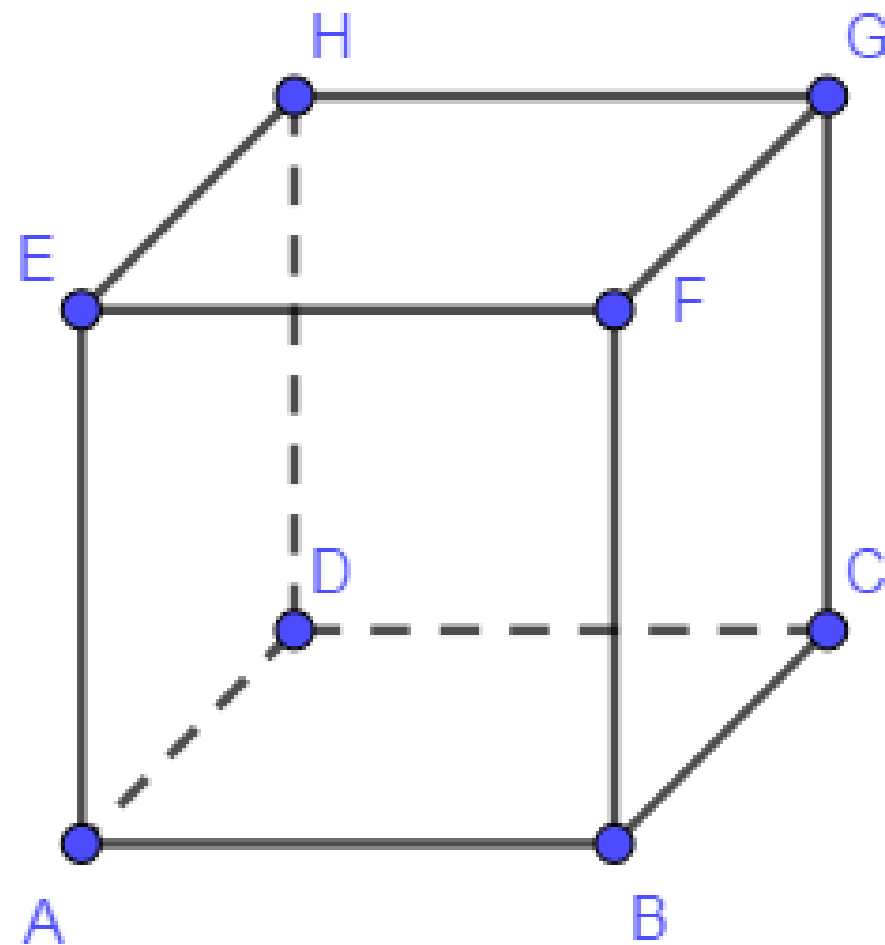
1. proyeksi miring, jika sinarnya jatuh miring pada bidang gambar.
2. proyeksi tegak (orthogonal), jika sinarnya jatuh tegak lurus pada bidang gambar.

Lukisan

Pentatito G & Mella T

Garis-garis yang terlukis pada kubus dapat kita kelompokkan menjadi dua, yakni:

- 1. Garis-garis frontal:** garis-garis yang sejajar dengan **bidang gambar**. Atau setiap garis yang terletak pada **bidang frontal**. Garis-garis ini pada keadaan sesungguhnya dan dalam proyeksi mempunyai ukuran yang sama.
- 2. Garis-garis orthogonal:** garis-garis yang tegak lurus pada bidang gambar. Garis-garis ini dapat lebih panjang dan dapat lebih pendek dari ukuran sebenarnya.



Garis-garis frontal: contohnya AB, EF, HG, dan DC

Garis-garis orthogonal: AD, BC, FG, dan EH

Sudut simpang: ialah sudut yang dibentuk oleh proyeksi garis orthogonal dan sembarang garis mendatar pada bidang proyeksi, mis: sudut BAD

Perbandingan proyeksi: adalah perbandingan antara proyeksi suatu garis orthogonal dengan panjang garis itu sebenarnya.

Garis-Garis Sejajar

Dua garis dikatakan sejajar jika keduanya terletak pada bidang yang sama dan tidak mempunyai titik persekutuan.

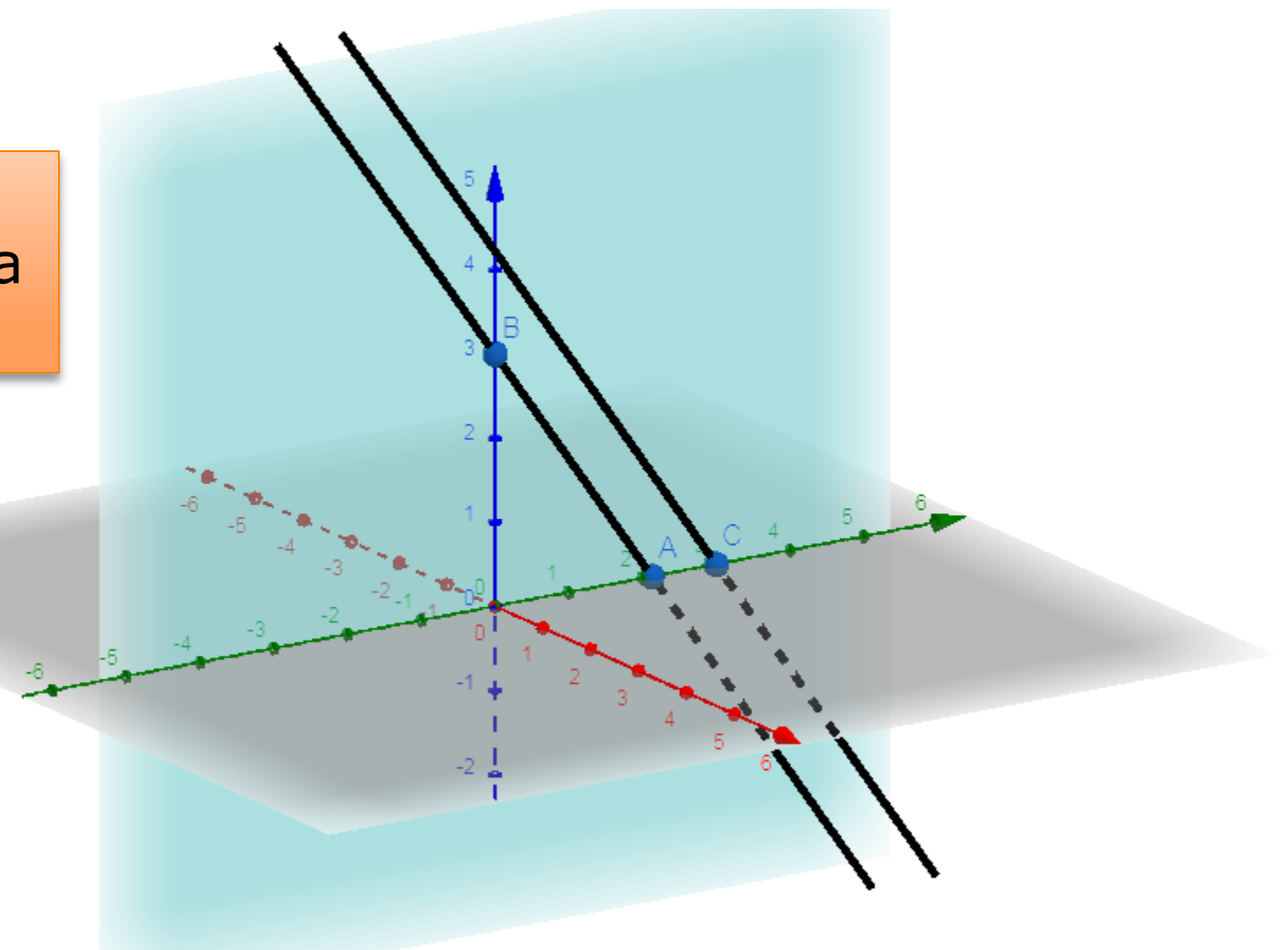
Teorema 7. Jika salah satu diantara dua garis sejajar memotong sebuah bidang, maka garis yang lainnya juga memotong bidang itu.

Ditentukan: $a//b$ dan a memotong bidang α

Akan dibuktikan: b memotong bidang α

Bukti: Gambarlah!

karena $a//b$ maka a dan b terletak pada satu bidang misalnya bidang β yang memotong bidang α menurut garis (α, β) . Karena a memotong (α, β) maka menurut geometri bidang, garis b juga memotong garis (α, β) . Ini berarti b memotong bidang α , karena garis (α, β) terletak pada bidang α .



Link geogebra :

<https://www.geogebra.org/3d/uqrkegzv>

Teorema 8.

Jika dua garis masing-masing sejajar dengan garis ke tiga, maka ke dua garis itu sejajar.c

Ditentukan: $b // a$ dan $c // a$

Akan dibuktikan: $b // c$

Bukti: Gambarlah!

Harus dibuktikan b dan c terletak pada satu bidang dan tidak mempunyai satu titik persekutuan. Lukis bidang γ yang melalui b dan sebuah titik P pada c . Misal c tidak sejajar dengan b maka c memotong bidang γ di P . Menurut teorema 7, garis a juga akan memotong bidang γ (karena $a // c$), dan karena $b // a$ maka b juga akan memotong γ . Hal ini tidak mungkin karena b terletak pada bidang γ , jadi b dan c terletak pada satu bidang.

Tinggal membuktikan b dan c tidak berpotongan. Andaikan b dan c berpotongan, ini berarti melalui satu titik dapat ditarik dua garis yang masing-masing sejajar dengan garis a . Hal ini tidak mungkin, jadi b dan c tidak berpotongan atau sejajar.

Teorema 9. Semua garis yang memotong suatu garis yang diketahui dan masing-masing sejajar dengan suatu garis lain, terletak pada satu bidang.

Diketahui: garis-garis c, d, e , dst memotong garis a dan $c//b, d//b, e//b$, dst

Akan dibuktikan: garis-garis c, d, e , dst terletak pada satu bidang.

Bukti:

Gambarlah!

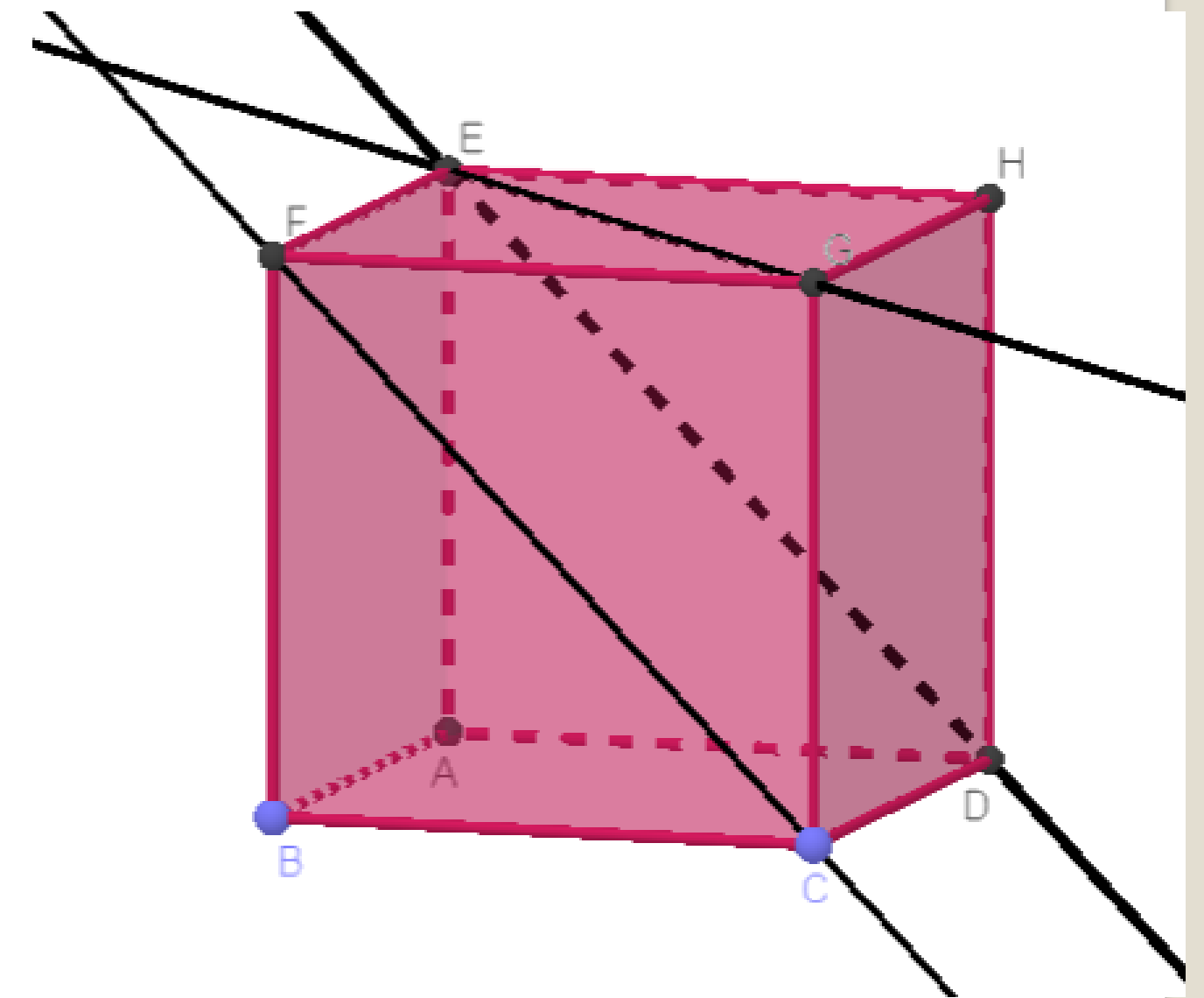
Melalui garis c dan a dapat dilukis sebuah bidang, misal bidang α . Melalui sebuah titik pada a , dapat dilukis tak hingga banyak garis yang sejajar c , antara lain d dan e , dan karena $c//b$ maka garis-garis d, e , dst ini sejajar b . Karena garis-garis itu sejajar c maka terletak pada bidang α yang artinya satu bidang.

Definisi

Sudut antara dua garis bersilangan adalah sebuah sudut yang didapat jika dari sembarang titik P ditarik sinar-sinar yang sejajar dengan garis-garis yang bersilangan.

Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 2 cm. Sudut antara garis EG dan garis CF adalah sudut DEG

Ilustrasi gambar : <https://www.geogebra.org/classic/u5sjfqhv>



Garis Tegak Lurus Pada Bidang

Suatu garis dikatakan tegak lurus suatu bidang, jika garis itu tegak lurus pada semua garis yang terletak pada bidang itu.

Teorema 11.

Jika suatu garis tegak lurus pada dua garis yang berpotongan, maka garis itu tegak lurus semua garis yang terletak pada bidang yang memuat dua garis berpotongan tersebut.

Dengan kata lain, suatu garis tegak lurus pada dua garis berpotongan, maka garis itu tegak lurus pada bidang yang memuat garis yang berpotongan itu.

Teorema 12. Jika dari suatu titik pada suatu garis ditarik garis-garis yang tegak lurus pada garis itu, maka garis-garis itu terletak pada suatu bidang.