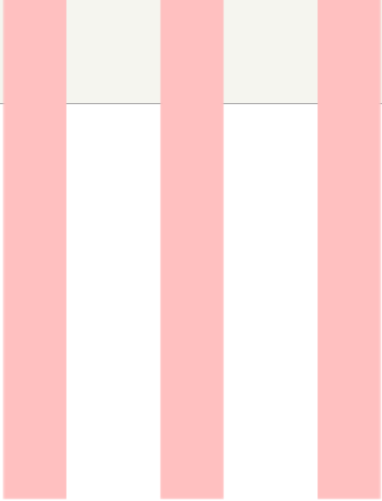
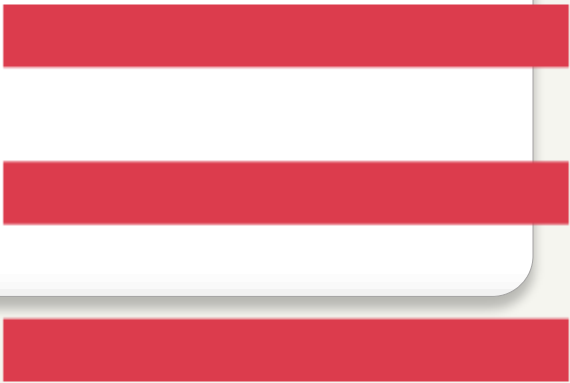




Geometri Pertemuan 10

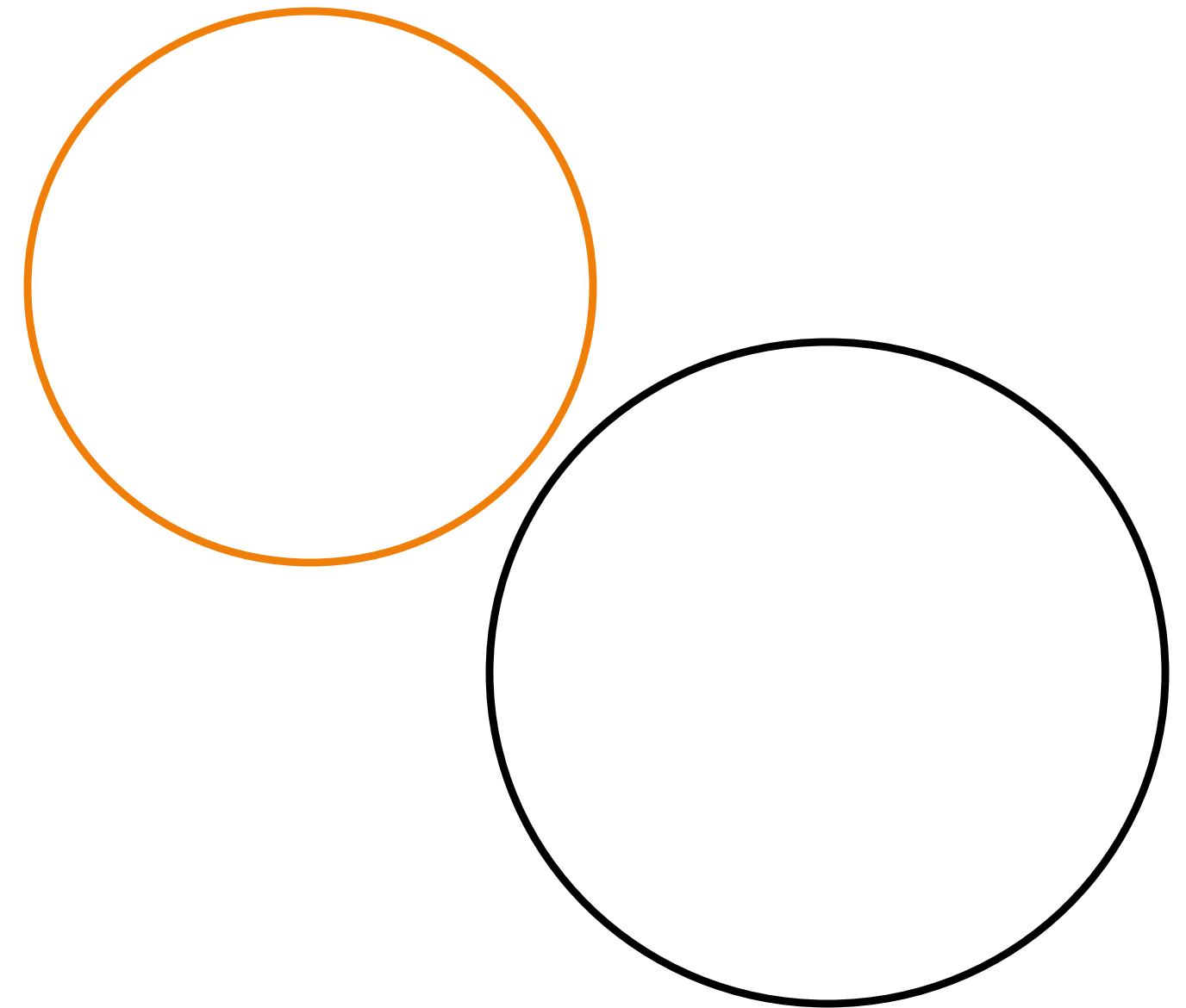
Drs. Pentatito Gunowibowo, M.Pd.
Mella Triana, S.Pd., M.Pd.



Lingkaran

Capaian Pembelajaran

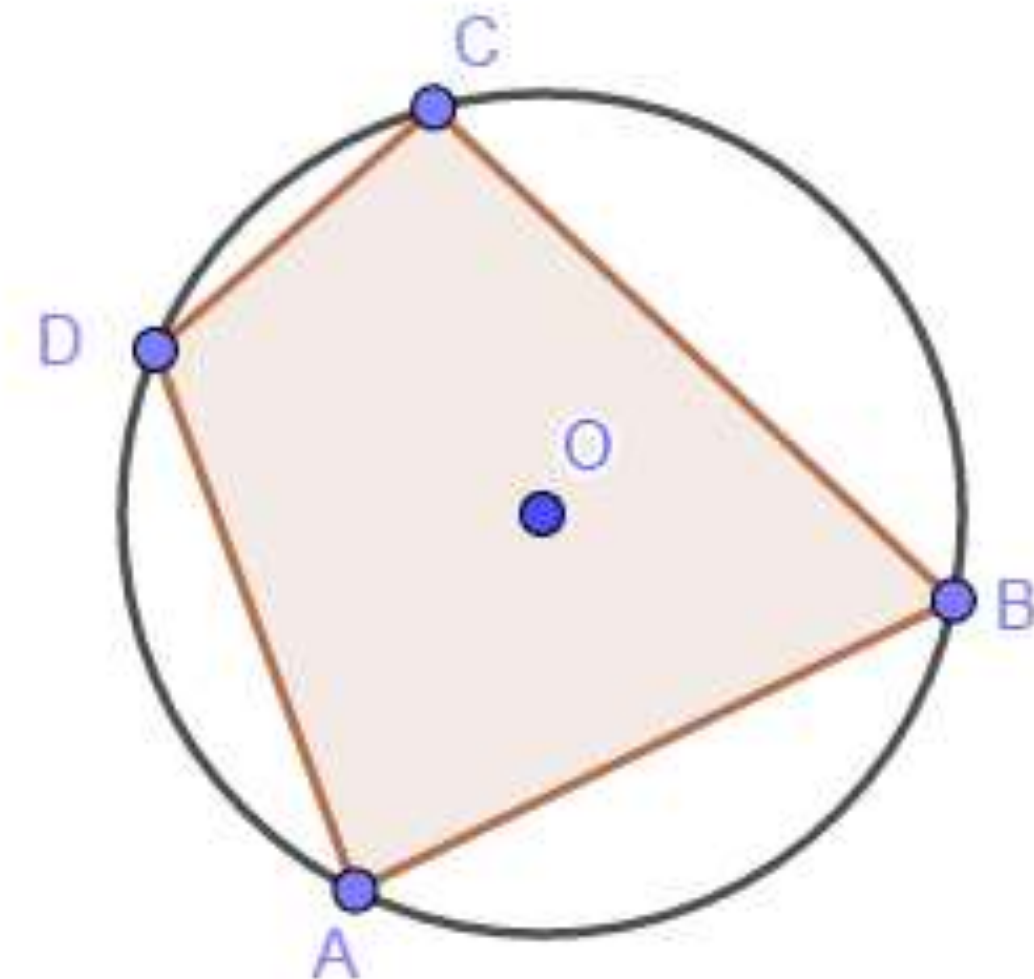
Mahasiswa memahami aksioma, definisi, teorema, serta dapat menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan lingkaran



SEGIEMPAT TALI BUSUR

Definisi 5.7

Segi empat yang titik-titik sudutnya pada suatu lingkaran disebut **segi empat tali busur**. Sebaliknya lingkaran yang melalui titik-titik sudut suatu segi empat di sebut **lingkaran luar segi empat tali busur**.



Teorema 5.15

Dalam suatu segiempat tali busur sudut-sudut berhadapan menjadi sudut pelurus masing-masing

Diketahui:

Segiempat ABCD adalah segi empat tali busur

Akan dibuktikan:

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

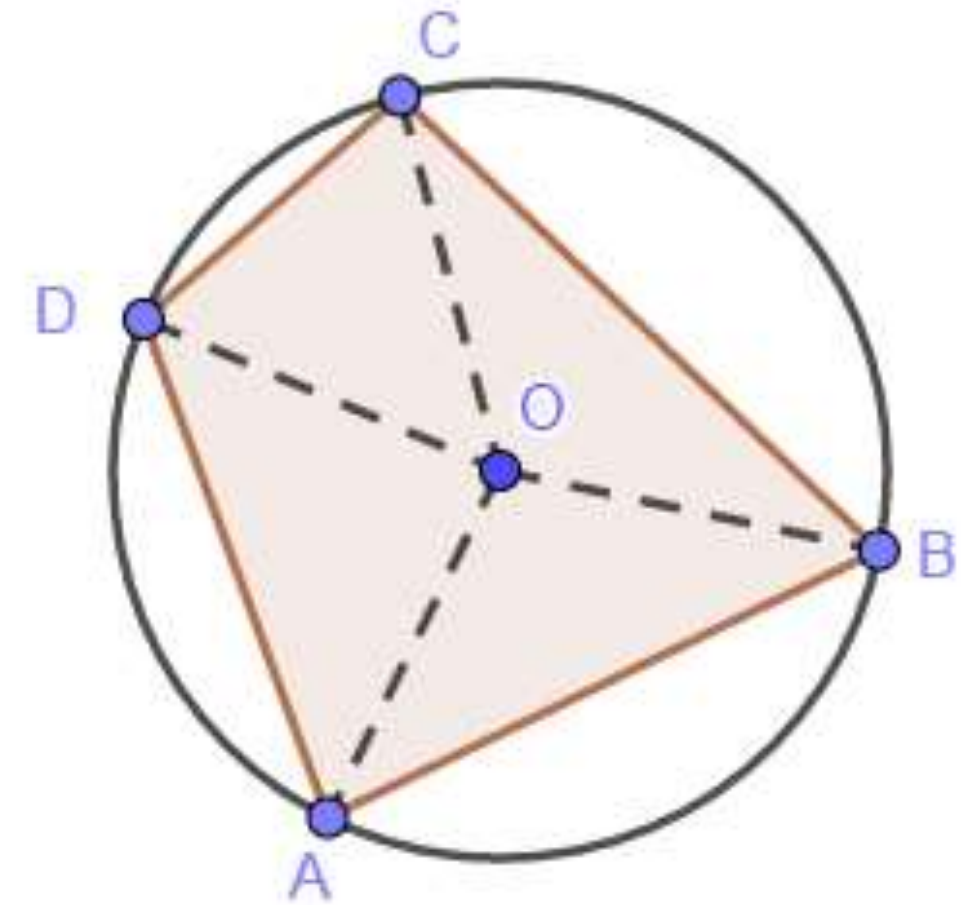
$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

Bukti :

Perhatikan gambar disamping. Misalkan titik pusat lingkaran adalah titik O, maka berdasarkan teorema 5.6

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2} \angle BOD \text{ yang menghadap busur } BCD + \frac{1}{2} \angle BOD \text{ yang menghadap busur } BAD = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$$

$$\angle B + \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC \text{ yang menghadap busur } ADC + \frac{1}{2} \angle AOC \text{ yang menghadap busur } ABC = \frac{1}{2} 360^\circ = 180^\circ$$



Teorema 5.16

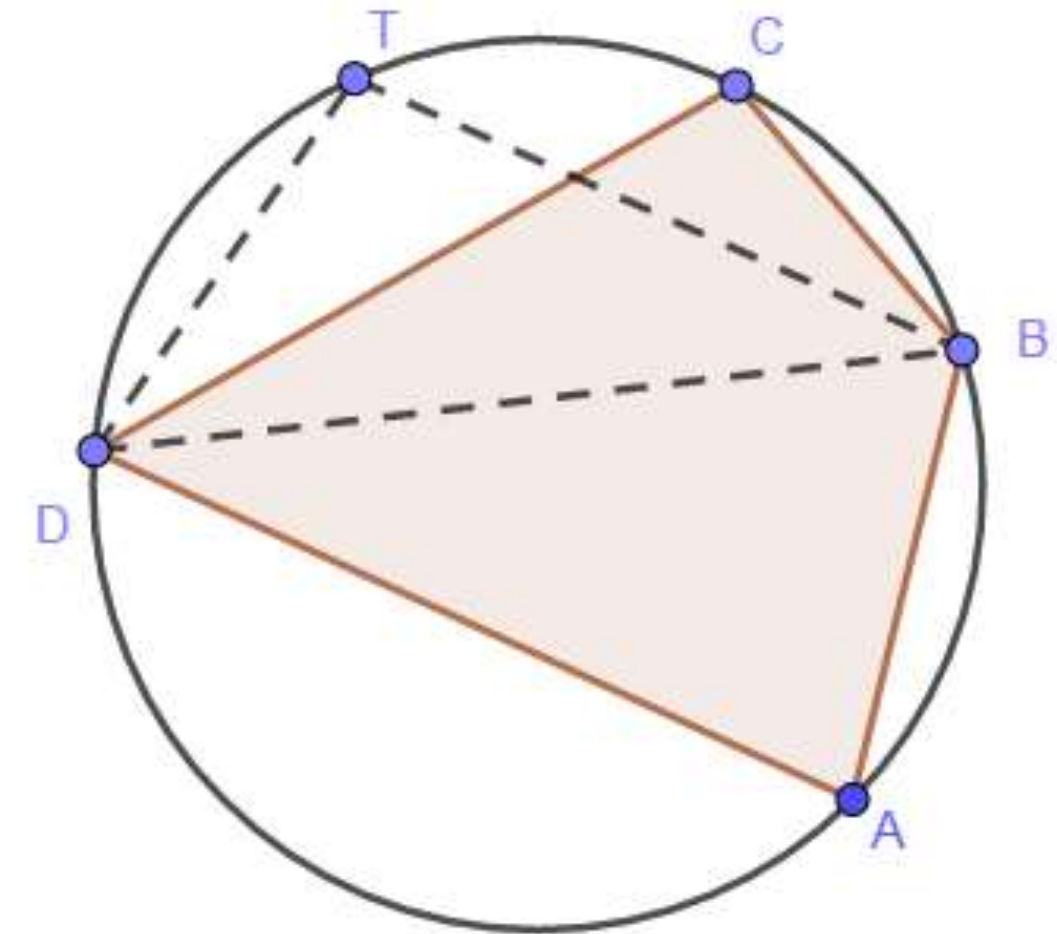
Pentatito G & Mella T

Jika dalam suatu segiempat sudut-sudut berhadapan menjadi sudut pelurus masing-masing, maka segiempat itu adalah segi empat tali busur.

Diketahui: Segiempat ABCD dengan $\angle A + \angle C = 180$

Akan dibuktikan: Segiempat ABCD segiempat tali busur

Bukti: Bentuk lingkaran melalui titik A, B, dan D. Pada lingkaran itu, tentukan sembarang titik T diluar busur BAD. Hubungkan titik T dengan titik B dan D, maka segiempat ABTD adalah segiempat talibusur. Dengan demikian $\angle A + \angle T = 180$ padahal diketahui $\angle A + \angle C = 180$. sehingga oleh karenanya titik C terletak pada busur BTD atau terletak pada lingkaran yang melalui A, B, dan D. Jadi segiempat ABCD segiempat tali busur.



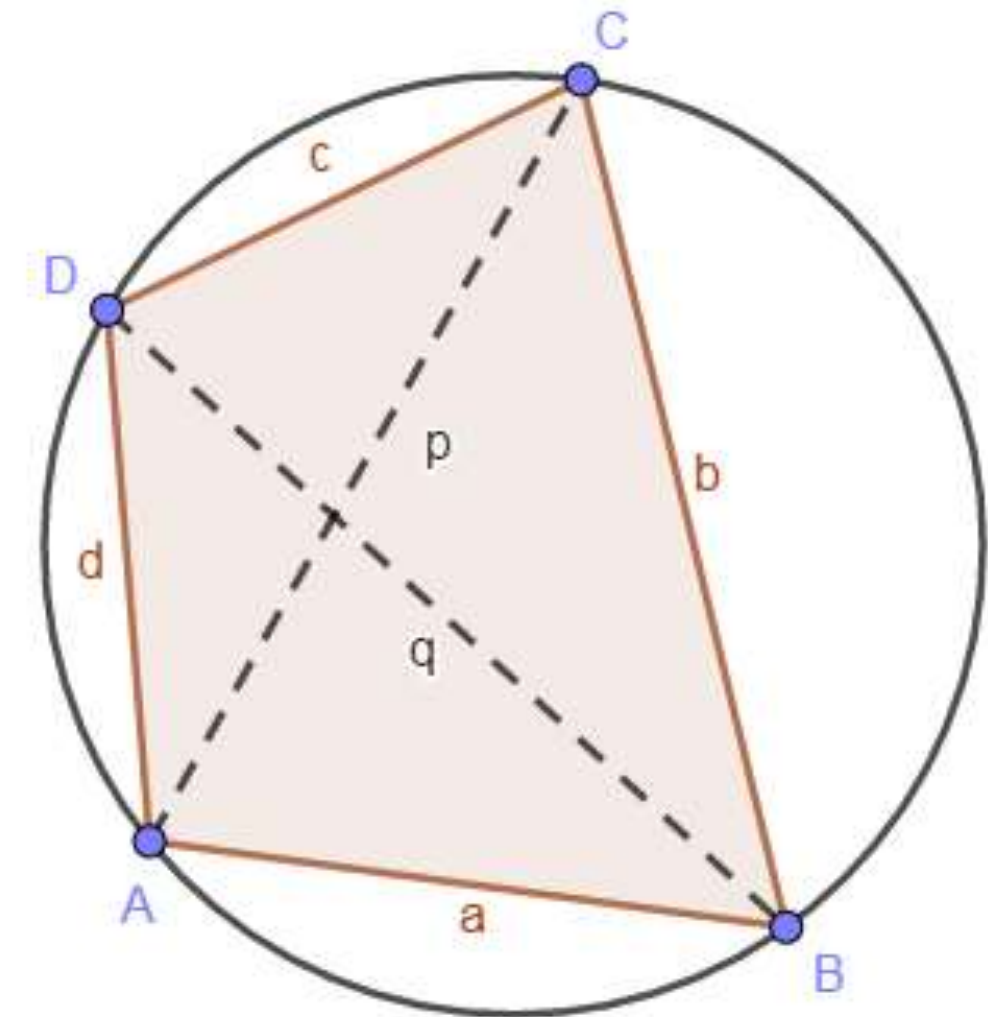
Teorema 5.16 (Ptolemaeus)

Dalam suatu segiempat tali busur hasil kali diagonal-diagonalnya sama dengan jumlah dari hasil kali sisi-sisi berhadapannya.

Diketahui: Segiempat ABCD segiempat tali busur. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$, $AC = p$ dan $BD = q$

Akan dibuktikan: $pq = ac + bd$

Buktikan sebagai Latihan !



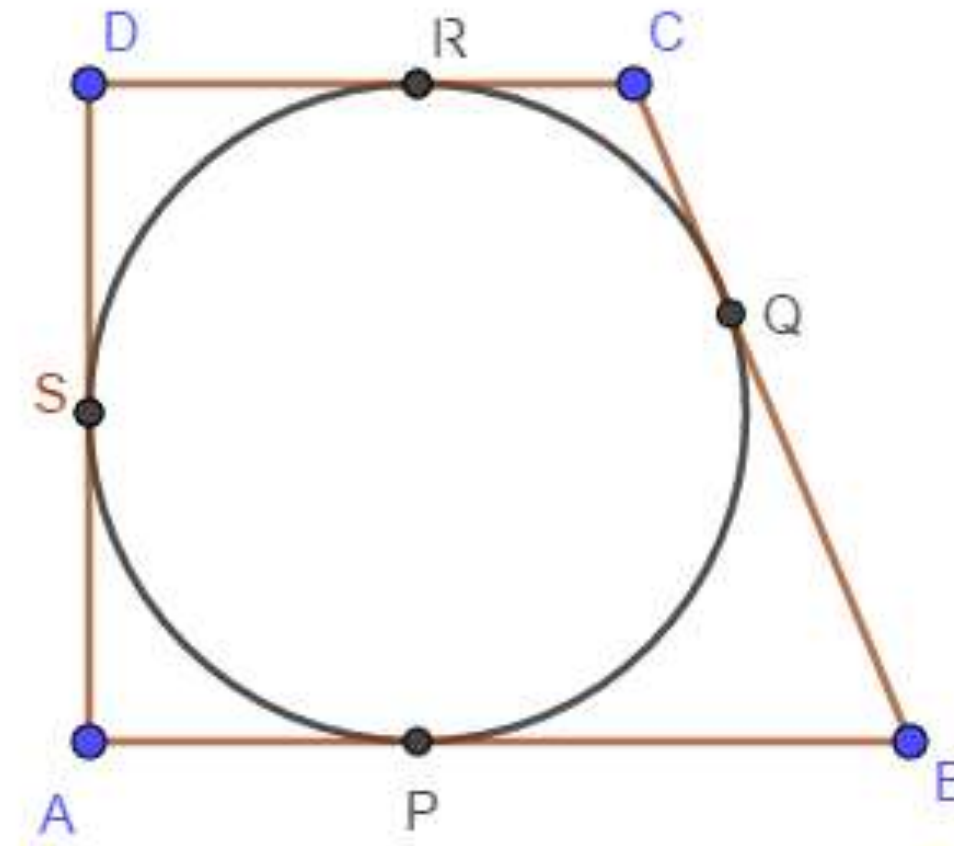
Petunjuk : Ambil titik E pada AC sedemikian hingga $\angle ADB = \angle CDE$

SEGIEMPAT GARIS SINGGUNG

Pentatito G & Mella T

Definisi 5.8

Segi empat yang sisi-sisinya menyinggung suatu lingkaran disebut **segi empat garis singgung**. Sebaliknya lingkaran yang menyinggung suatu segi empat di sebut **lingkaran dalam segiempat itu**.



Teorema 5.16

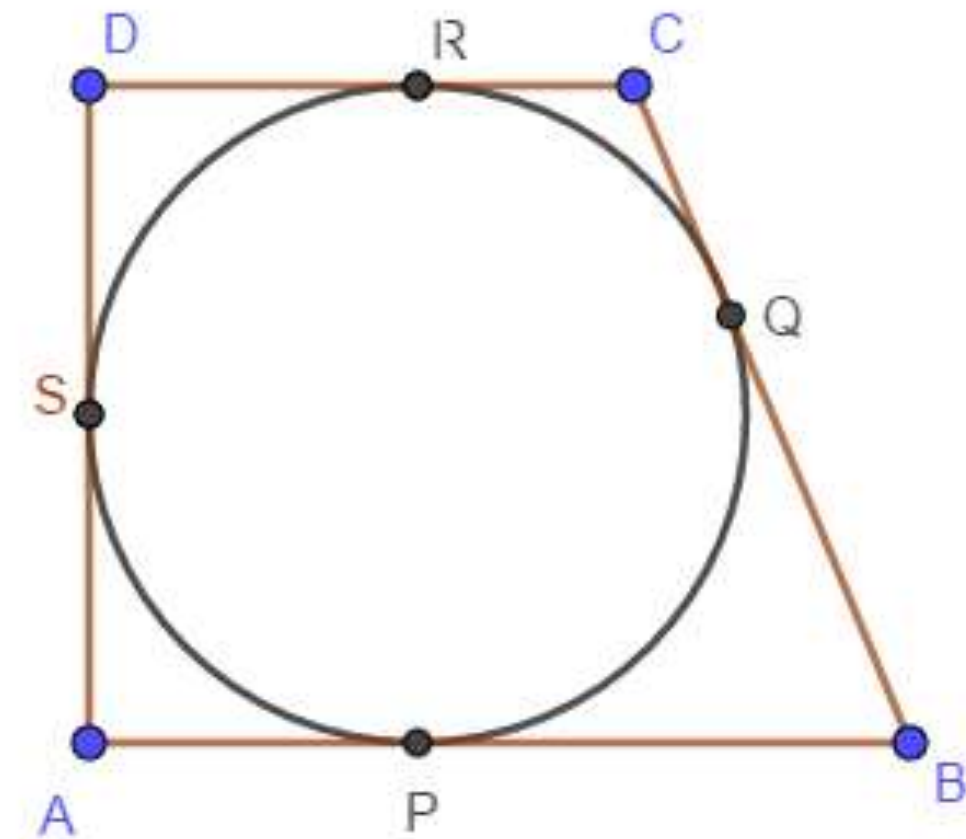
Pada segiempat garis singgung jumlah dua sisi-sisi berhadapan sama dengan jumlah kedua sisi-sisi yang lainnya.

Diketahui: segiempat ABCD segiempat garis singgung

Akan dibuktikan:

$$AB + CD = AD + BC$$

Buktikan!



Teorema 5. 17

Jika jumlah dua sisi-sisi berhadapan sama dengan jumlah kedua sisi-sisi yang lain dalam suatu segiempat, maka segiempat itu adalah segiempat garis singgung.

Diketahui: Pada segiempat ABCD

$$AB + CD = AD + BC$$

Akan dibuktikan:

segiempat ABCD segiempat garis singgung

Bukti:

Lukis lingkaran yang menyinggung AB, BC, dan AD, maka ada tiga kemungkinan: 1) CD terletak di luar lingkaran, (2) CD memotong lingkaran, dan (3) CD menyinggung lingkaran.

Andaikan CD terletak di luar lingkaran

Tarik dari D garis singgung DC_1 maka segiempat ABC_1D adalah segiempat garis singgung. Jadi $AB + C_1D = AD + BC_1$

Padahal dalam $\triangle DCC_1$,

$$DC - DC_1 < CC_1$$

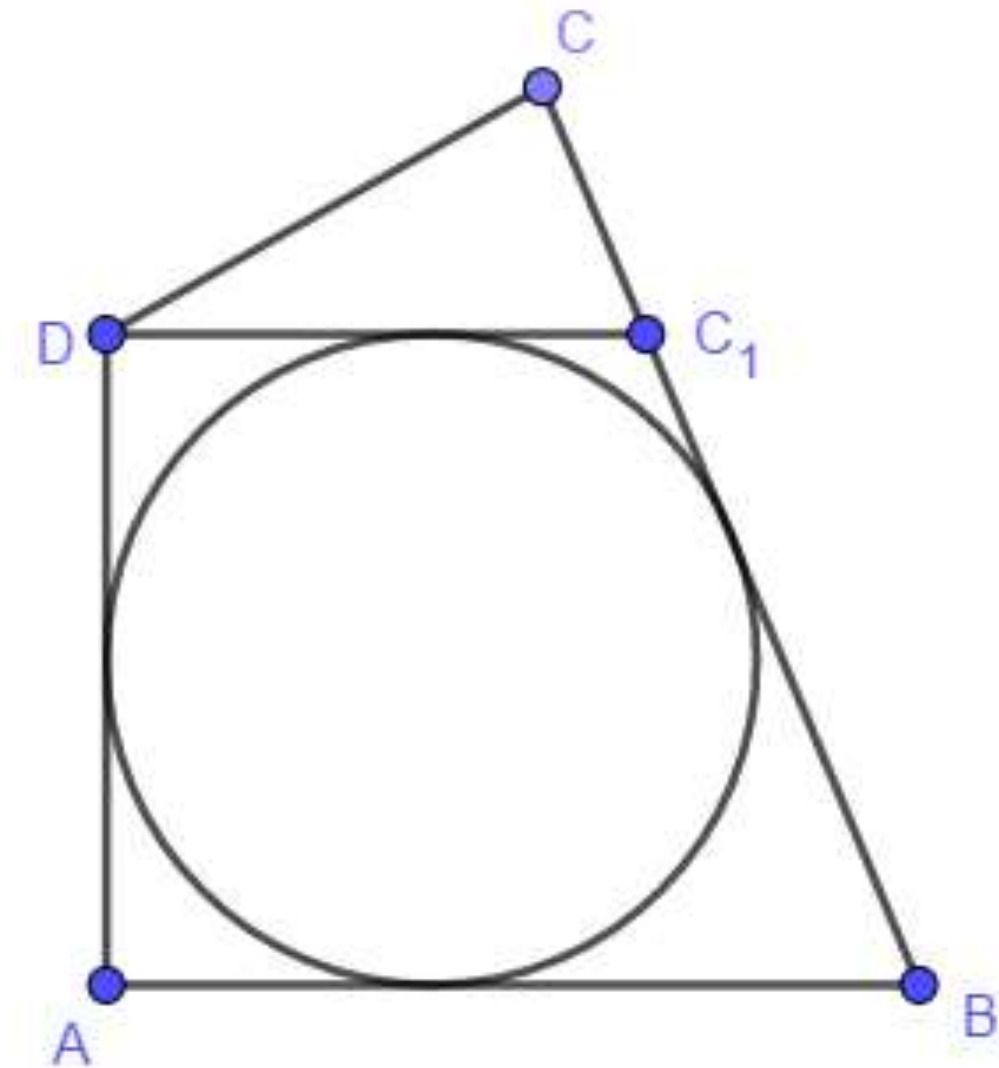
$$DC - DC_1 < BC - BC_1$$

$$DC - DC_1 < BC - (AB + C_1D - AD)$$

$$DC - DC_1 < BC - (AB + C_1D - AD)$$

$$AB + CD < AD + BC$$

Hal ini bertentangan dengan yang diketahui, jadi DC tidak mungkin terletak di luar lingkaran.



Dengan cara yang sama kita dapat buktikan bahwa DC tidak mungkin memotong lingkaran, Jadi DC haruslah menyinggung lingkaran. Akibatnya ABCD adalah segiempat garis singgung.

KEDUDUKAN DUA LINGKARAN

- 1) Dua Lingkaran yang Bersinggungan di Luar
- 2) Dua Lingkaran yang Bersinggungan di Dalam
- 3) Dua Lingkaran yang Berpotongan
- 4) Dua Lingkaran yang Saling Lepas
- 5) lingkaran yang satu di dalam lingkaran yang lain

Kegiatan (TUGAS) :

1. Gambarlah dua lingkaran untuk setiap kedudukan di atas!
2. Jika ada, gambarlah garis singgung persekutuan dua lingkaran untuk setiap kedudukan di atas!
3. Hitung panjang garis singgung persekutuanannya!

DUA LINGKARAN YANG BERSINGGUNGAN DI LUAR

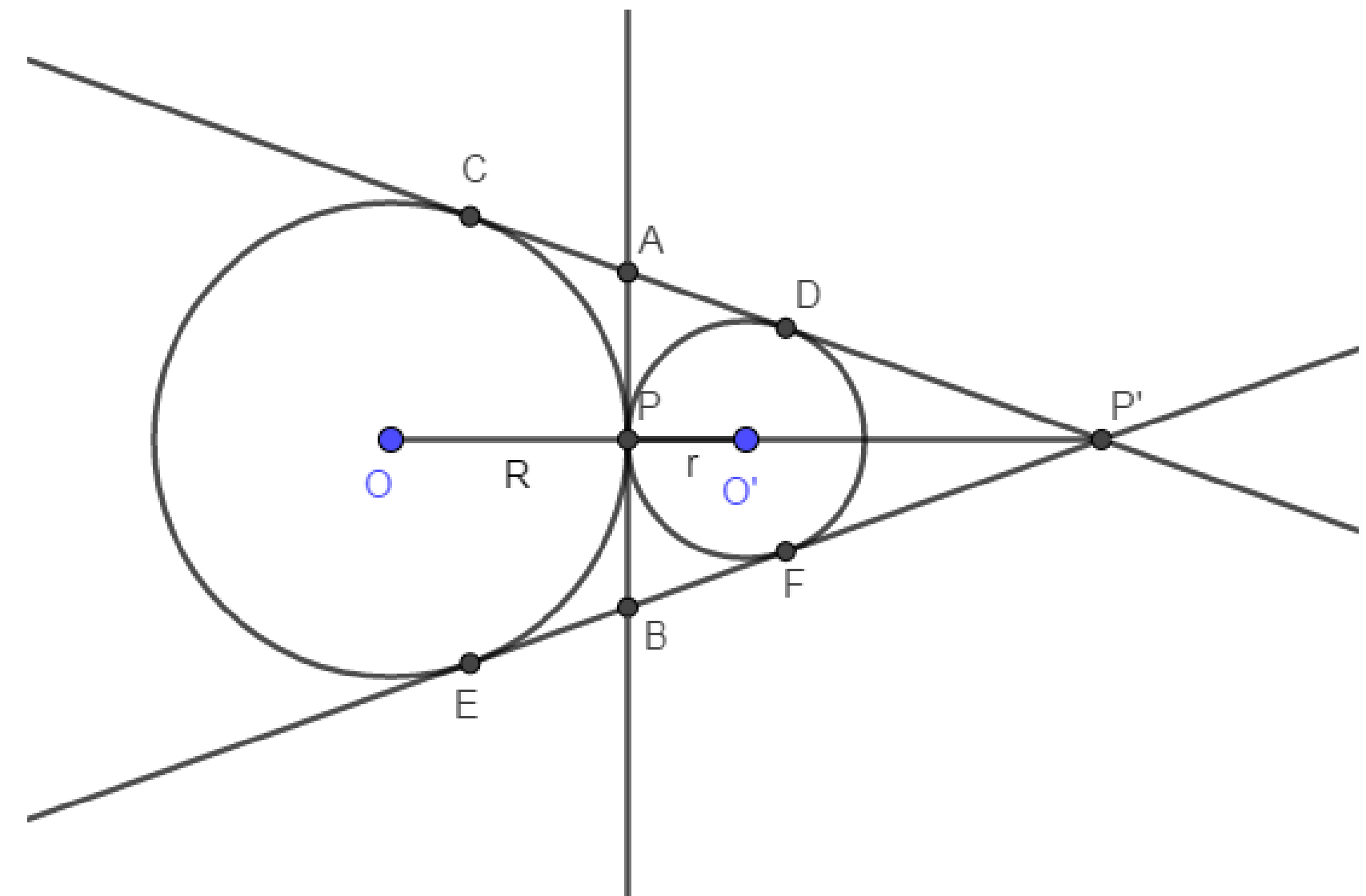
Pentatito G & Mella T

Definisi 5.8

Dua lingkaran dikatakan bersinggungan di luar, bila kedua lingkaran tersebut berpotongan di satu titik dan lingkaran yang satu berada di luar lingkaran yang lainnya.

Lingkaran **O** dan pada gambar bersinggungan di luar pada titik **P**.

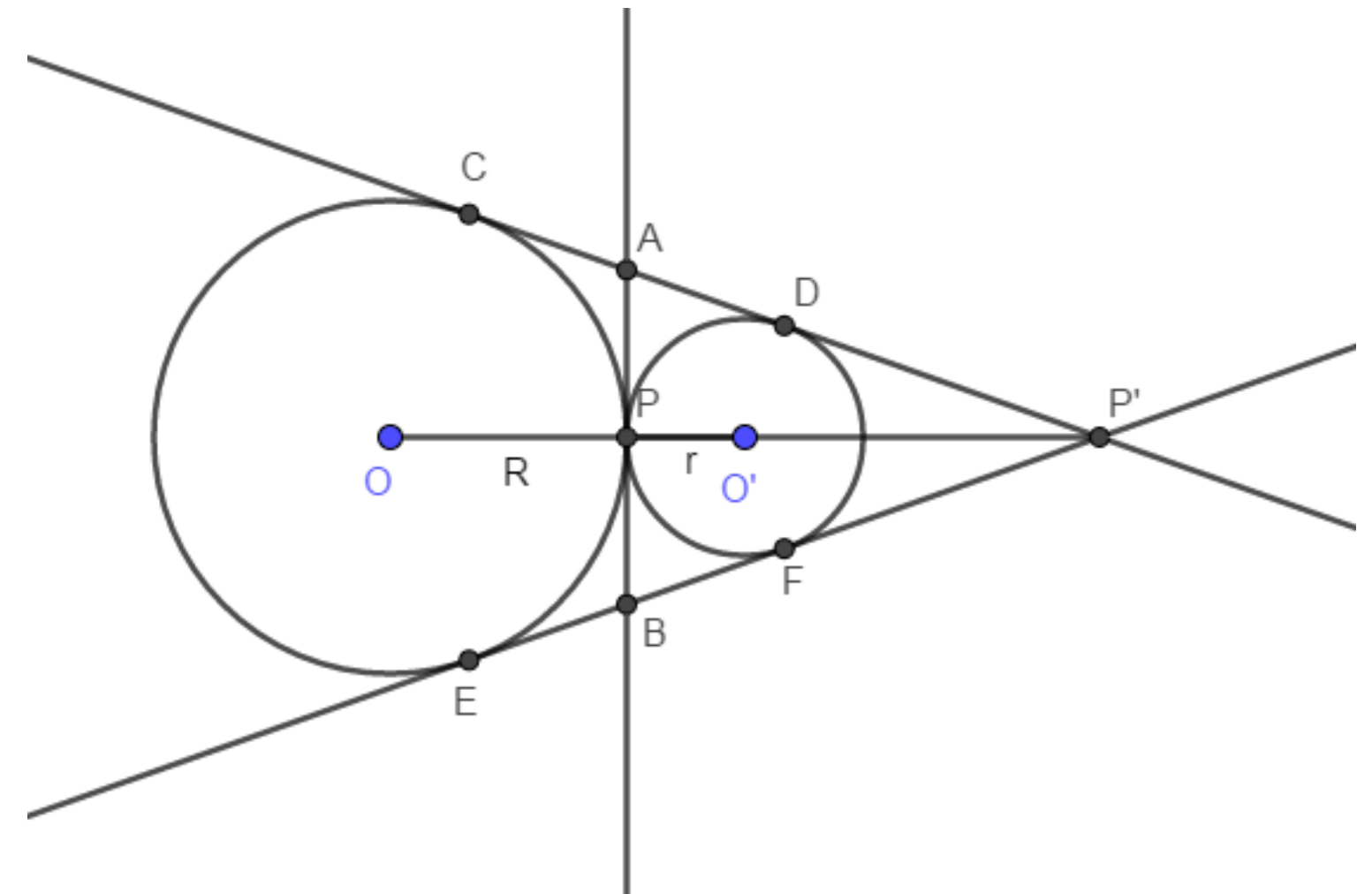
AB adalah garis singgung dalam kedua lingkaran tersebut. CD dan EF disebut garis singgung luar. Garis titik pusat OO' melalui **P** dan **P'** panjangnya sama dengan jumlah jari-jarinya, yaitu $R + r$



Teorema 5.18

Garis titik pusat dua lingkaran yang bersinggungan di luar merupakan garis berat untuk garis singgung dalam kedua lingkaran.

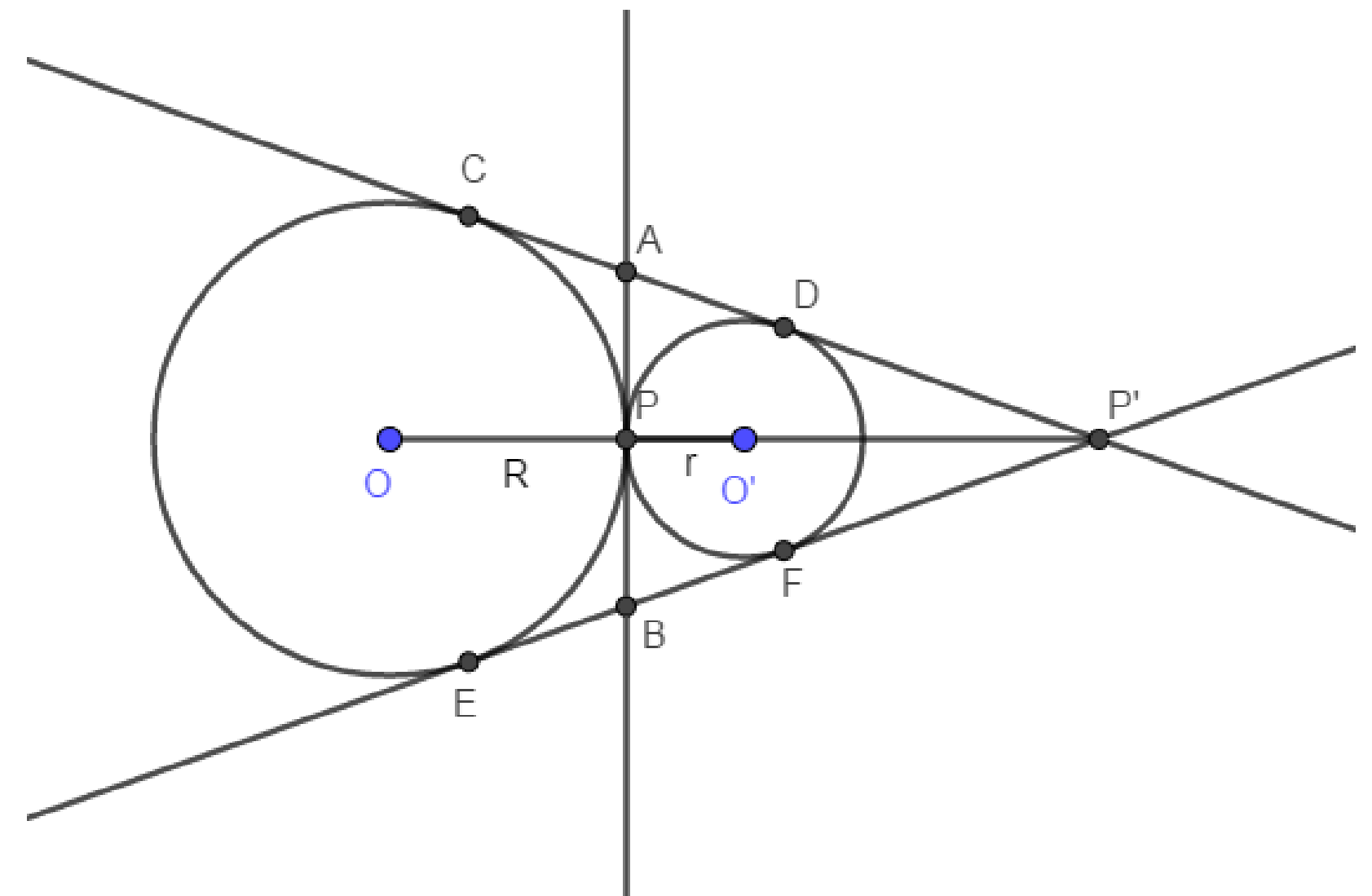
Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!



Teorema 5.19

Garis singgung dalam dua lingkaran yang bersinggungan di luar membagi dua setiap garis singgung luar bersama.

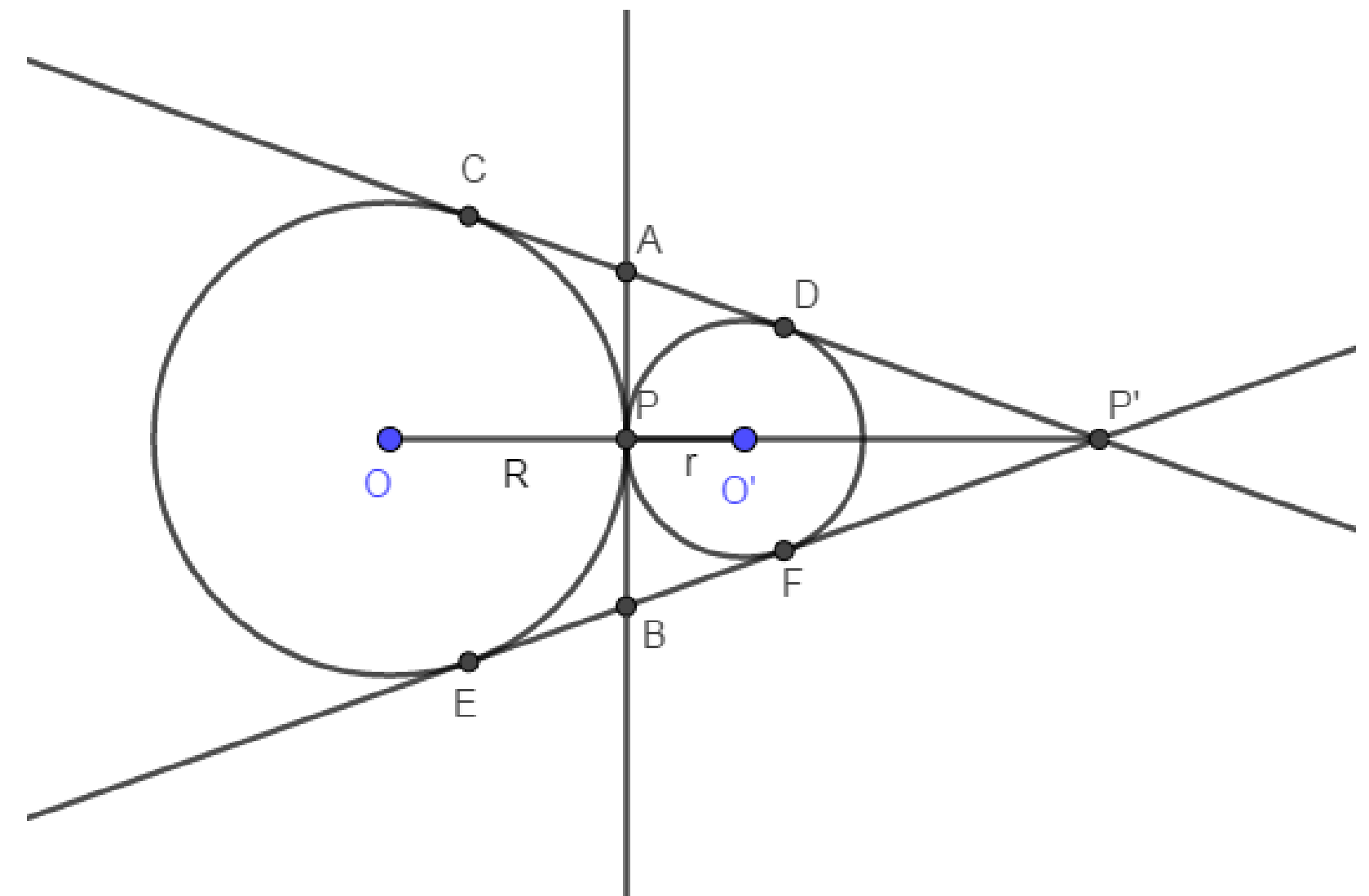
Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!



Teorema 5.20

Kuadrat panjang garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang bersinggungan di luar sama dengan empat kali hasil ganda panjang kedua jari-jari lingkarannya.

Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!



DUA LINGKARAN YANG BERSINGGUNGAN DI DALAM

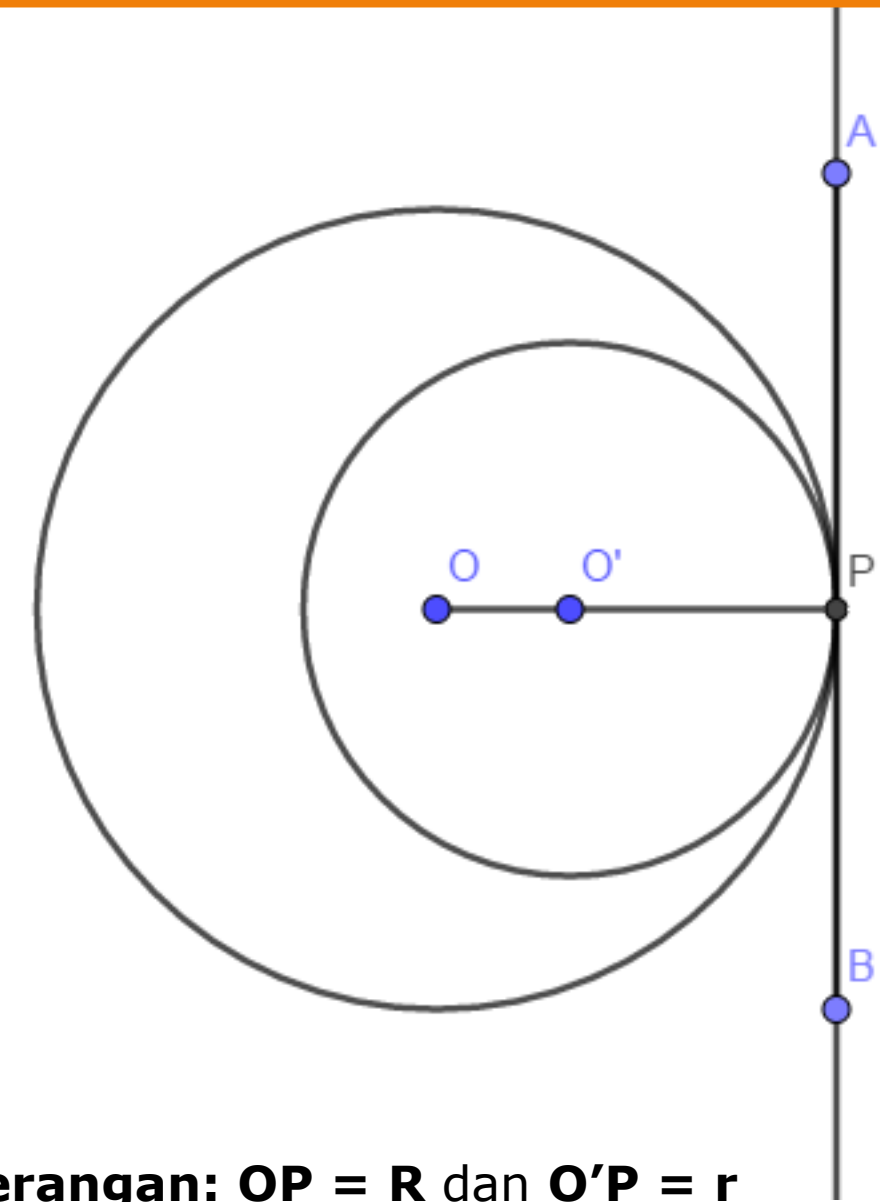
Pentatito G & Mella T

Definisi 5.9

Dua lingkaran dikatakan bersinggungan di dalam, bila kedua lingkaran tersebut berpotongan di satu titik dan lingkaran yang satu berada di dalam lingkaran yang lainnya.

Lingkaran **O** dan **O'** pada gambar bersinggungan di dalam pada titik **P**. AB adalah garis singgung luar kedua lingkaran tersebut.

Garis titik pusat **OO'** jika diperpanjang melewati **P**, tegak lurus dengan AB, dan panjangnya sama dengan selisih antara jari-jarinya, yaitu **$R - r$** .

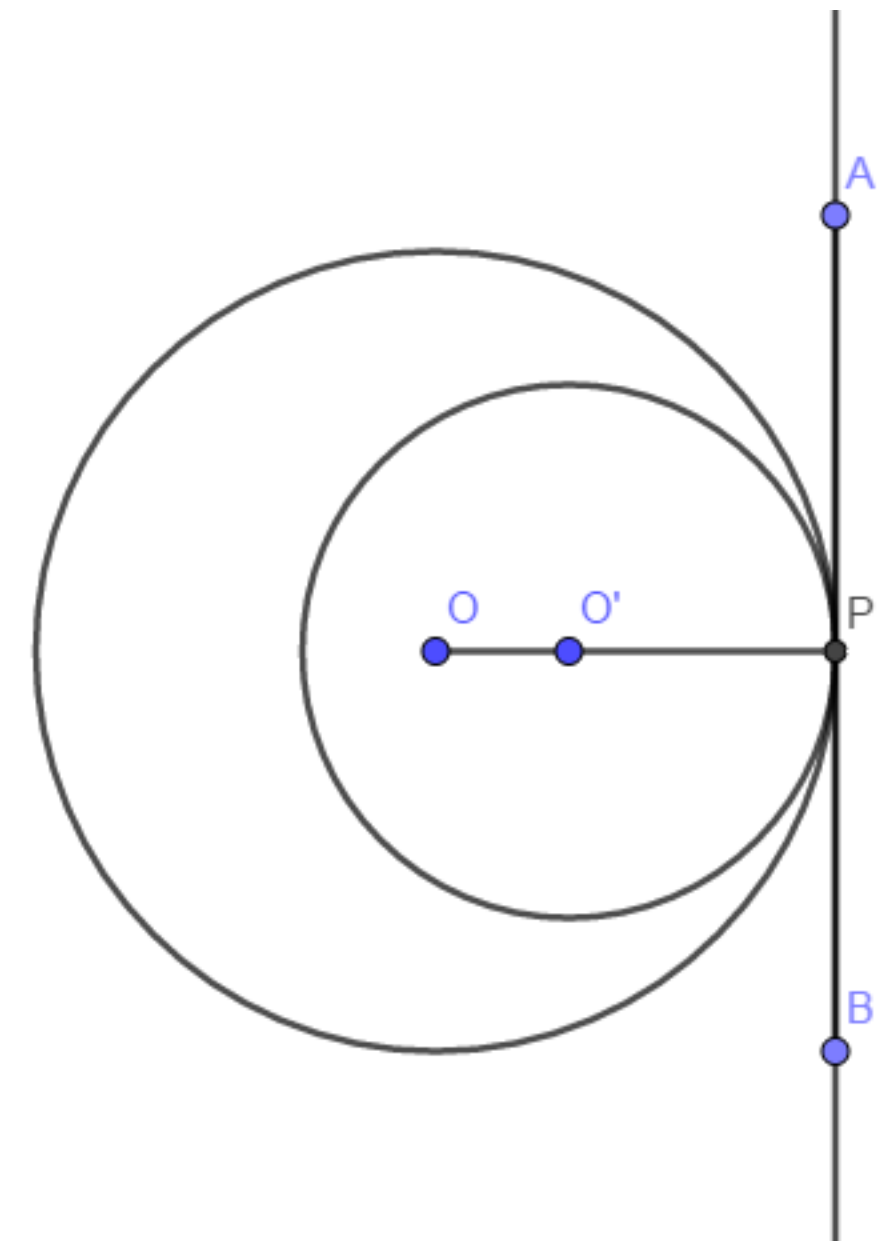


Keterangan: **$OP = R$** dan **$O'P = r$**

Teorema 5.20

Garis titik pusat dua lingkaran yang bersinggungan di dalam tegak lurus dengan garis singgung dalam kedua lingkaran.

Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!



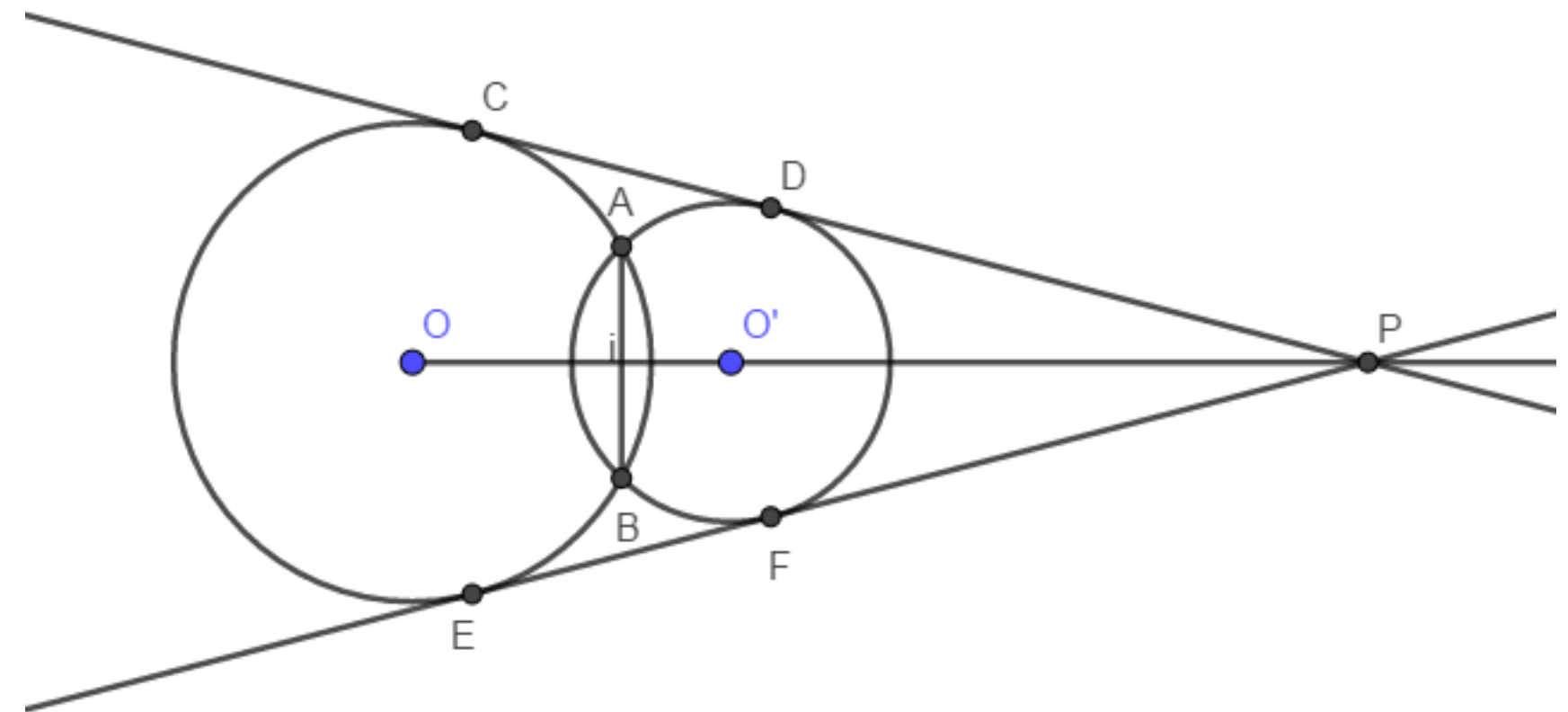
DUA LINGKARAN YANG BERPOTONGAN

Pentatito G & Mella T

Definisi 5.10

Dua lingkaran dikatakan berpotongan, bila kedua lingkaran tersebut berpotongan di dua titik.

Lingkaran O dan O' pada gambar berpotongan di titik A dan B . AB merupakan tali busur bersama. Jika panjang jari-jari kedua lingkaran tidak sama, maka garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut yaitu CD dan EF bertemu di satu titik (pada gambar di titik P). Garis titik pusat jika diperpanjang akan melalui P .



Teorema 5.21

Garis titik pusat dua lingkaran berpotongan tegak lurus terhadap tali busur persekutuan (bersama) dan membagi dua sama panjang tali busur tersebut.

Teorema 5.22

Garis singgung persekutuan luar lingkaran yang berpotongan sama panjang dan kuadrat panjang garis singgung persekutuan luar tersebut sama dengan selisih kuadrat jarak pusat kedua lingkaran dengan selisih panjang jari-jari kedua lingkaran.

Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!

DUA LINGKARAN SALING LEPAS

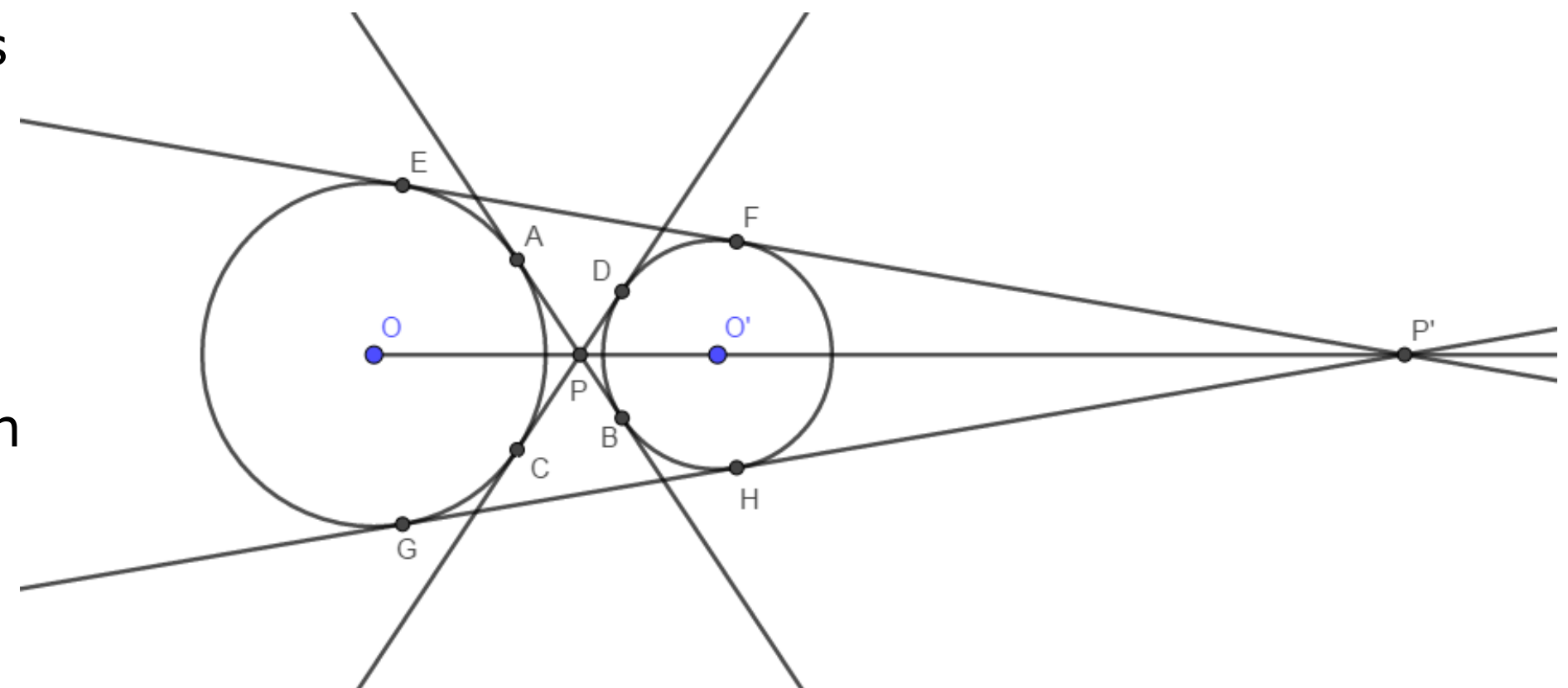
Pentatito G & Mella T

Definisi 5.11

Dua lingkaran dikatakan saling lepas bila kedua lingkaran tersebut tidak berpotongan maupun tidak bersinggungan. Terdapat dua kasus, yaitu lingkaran yang satu ada di dalam lingkaran yang lain dan lingkaran yang satu berada di luar lingkaran yang lain.

Dalam bahasan ini, hanya akan dibahas, kasus yang kedua.

Lingkaran O dan O' pada gambar benar-benar terpisah satu sama lain. Garis singgung dalam keduanya, AB dan CD , bertemu di titik P . Jika kedua lingkaran tidak sama, garis singgung luar kedua lingkaran tersebut, EF dan GH , jika diperpanjang, bertemu di titik P' . Garis titik pusat OO' melewati P dan P' .



Teorema 5.23

Garis singgung persekutuan dalam dua lingkaran yang saling lepas sama panjang dan kuadrat panjang garis singgung persekutuan dalam sama dengan selisih kuadrat jarak titik pusatnya dengan jumlah panjang jari-jarinya.

Teorema 5.24

Garis singgung persekutuan luar dua lingkaran yang saling lepas sama panjang dan kuadrat panjang garis singgung persekutuan luar sama dengan selisih kuadrat jarak titik pusatnya dengan selisih panjang jari-jarinya.

Untuk Latihan silahkan Anda buktikan!

LUAS DAERAH LINGKARAN, PANJANG BUSUR, LUAS JURING, DAN LUAS TEMBERENG

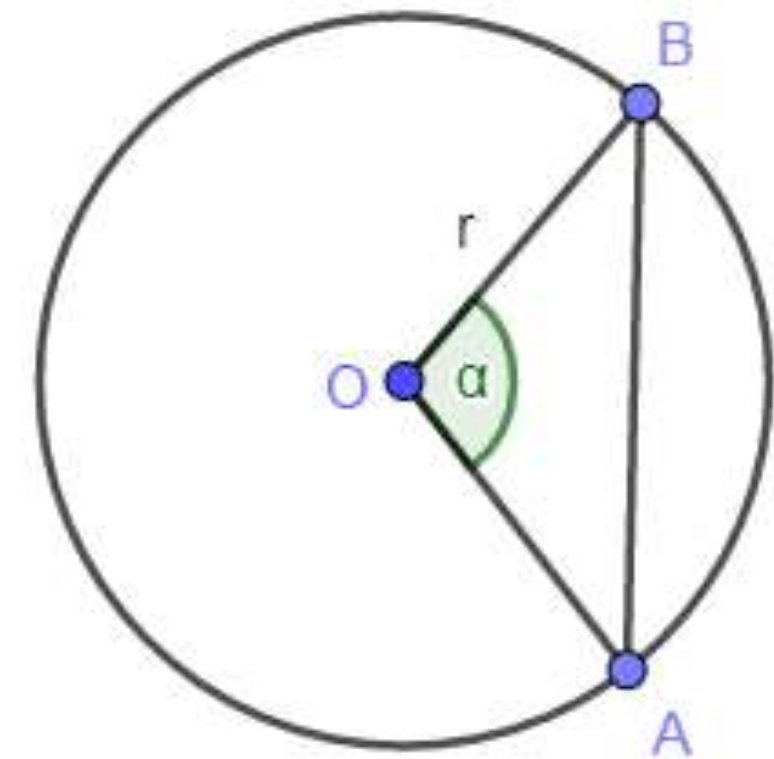
Keliling lingkaran berjari-jari r adalah $2\pi r$

luas daerah lingkaran berjari-jari r adalah πr^2

Panjang busur AB = $\frac{\text{besar } \angle AOB}{360^\circ} \times \text{keliling lingkaran}$

Luas juring AOB = $\frac{\text{besar } \angle AOB}{360^\circ} \times \text{luas lingkaran}$

Luas tembereng AB = luas juring AOB – luas segitiga AOB



EXERCISE

Kegiatan (TUGAS) :

1. Gambarlah dua lingkaran untuk setiap kedudukan di atas!
2. Jika ada, gambarlah garis singgung persekutuan dua lingkaran untuk setiap kedudukan di atas!
3. Hitung panjang garis singgung persekutuannya!

Buktikan Teorema-teorema yang belum dibuktikan